Digitized by Google

FONDO PROVINCIA

215.377

31724
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num° d' ordine 20
31/2/11

NAZIONALE
B. Prov.
919
NAPOLI
VITT. EM. III

Digitized by Google

B. S.
II
019

610102

DI NAPOLI

# ANALISE
## DES
# INFINIMENT PETITS,
*COMPRENANT*
## LE CALCUL INTEGRAL
dans toute ſon étenduë;

AVEC SON APPLICATION AUX QUADRATURES, RECTIFICATIONS, CUBATURES, CENTRES DE GRAVITE', DE PERCUSSION, &c. DE TOUTES SORTES DE COURBES.

*Par M.* STONE, *de la Societé Royale de Londres:*

SERVANT DE SUITE AUX INFINIMENT PETITS DE M.. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL:

*Traduit en François par M.* RONDET, *Maître de Mathématiques.*

Joseph Maurin

PROVINCIALE BIBLIOTECA NAPOLI

A PARIS,
Chez { JULIEN-MICHEL GANDOUIN, Quai de Conti, aux trois Vertus: ET PIERRE-FRANÇOIS GIFFART, ruë Saint Jacques, à Sainte Thereſe.

M. DCC. XXXV.
*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.*

REGIO VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

# DISCOURS PRÉLIMINAIRE,

## *SERVANT*

## DE SUPPLEMENT

*A la Préface qui eſt à la tête de l'Analyſe des Infiniment Petits de M. le Marquis* DE L'HÔPITAL.

IL y a bien des années que l'*Analyſe des Infiniment Petits de M. le Marquis* DE L'HÔPITAL, attendoit une ſeconde Partie pour remplir ſon titre, & former un Ouvrage complet. Cet illuſtre Auteur dans l'ingénieuſe *Préface* de cette Analyſe, nous apprend qu'il avoit eû deſſein de compoſer cette ſeconde Partie qui concerne le *Calcul integral* ; mais qu'il avoit ceſſé d'y penſer, depuis que le célebre *M. Leibnis* lui avoit fait ſçavoir qu'il comptoit don-

ner ce morceau dans un Ouvrage qu'il méditoit ſur *la ſcience de l'Infini.*

M. Leibnis promettoit volontiers des Ouvrages. Il avoit aſſez de facilité de génie pour en concevoir l'idée, & pour en former même, comme d'un premier coup d'œil, tout le plan général dans ſa tête. C'eſt dommage qu'il n'ait eû le tems d'en executer peut-être aucun hors *ſa Theodicée* qui n'eſt pas ce qu'il pouvoit faire de mieux. Mais, ſans parler des autres projets de M. Leibnis, on peut douter ſi celui dont il s'agit ici, étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit, & où M. de l'Hôpital avoir voulu l'entreprendre.

*Le Calcul differentiel* étoit facile à éclaircir, ou même aſſez éclairci dès ce tems-là. Il ne contient en ſoi aucune vraye difficulté. Il eſt comme *lineaire* & du *premier ordre des Problémes*, n'atteignant qu'aux premieres *affections exterieures & lineaires des Courbes*, aux tangentes, ſous-tangentes, perpendiculaires, ſous-perpendiculaires, diametres, axes, aſymptotes, développées, points ſimples ou doubles, de courbure, d'inflexion, de reflexion, en un mot, *aux modifications des circonferences exterieures.* Ce calcul même eſt abſolument fini, les Infiniment Petits s'y dérruiſant à cauſe de l'expreſſion relative & fractionnaire *dx : dy* qui eſt une grandeur finie.

Le principe très-ſimple de ce calcul va à tour, & ſa regle unique n'a poinr d'exception, & n'eſt arrêtée dans la *differentiation*, ni par les fractions, ni par les complexes, ni par les radicaux. D'ailleurs divers Auteurs, particulierement *MM. Bernoulli* avoient

ſuffiſament remanié cette partie, qui étoit à proprement parler la *partie de M. Leibnis*, ſans oublier *M. de Fermat, premier calculateur des Infiniment Petits*, la partie, en un mot, des François, des Allemands, & de tout le continent de l'Europe.

Mais *le Calcul integral*, dont la difficulté monte au *ſecond dégré des Problêmes*, aux quadratures, aux rectifications, aux cubatures, à cauſe de ſon expreſſion radicalement infiniteſimale *ydx* ou &c. étoit comme *la partie propre de M. Newton*, & de cette nation célebre qui ſemble former elle ſeule un continent à part dans le monde litteraire, comme dans le monde géographique, & peut-être auſſi dans le civil & dans le politique.

Ce n'eſt pas qu'il n'eut tranſpiré quelque lueur de ce *calcul reciproque des fluxions*. MM. Leibnis, Bernoulli, de l'Hôpital pouvoient bien, ſans le ſecours d'aucun autre, en avoir ſaiſi les premieres opérations, & pour le moins la regle inverſe du retour d'une differentielle à ſon integrale. Mais le grand Nevvton gardoit bien des choſes *in petto*, comme le diſoit M. Leibnis à propos d'autre choſe. Ce que ce profond Géometre en avoit déja donné au public étoit peu acceſſible. A peine avoit-on bien l'idée de ce qu'on qualifioit ſans ceſſe de *nouvelles Methodes*, de *ſcience de l'Infini*, de *Calcul infiniteſimal*, de *Géometrie interieure*.

Ce ne furent guéres que les diſputes élevées il y a environ 20 années entre MM. Leibnis & Nevvton, & preſqu'entre les deux continens Rivaux, qui nous valurent la notion préciſe & déſormais immuable,

des nouveaux calculs. Il fallut que le grand Newton parlât lui-même pour nous dire que ſa Méthode avoit inſéparablement deux branches, dont la Méthode de M. Leibnis, qui en convint, étoit ſous le nom d'*Analyſe des Infiniment Petits*, la moins conſiderable, & dont l'*Analyſe des Series* étoit l'autre grande moitié.

Et cela eſt tout d'un coup évident pour quiconque ſçait que le calcul integral même ne va pas ſans le ſecours de ces Series, & que la plûpart des quadratures & des *Problêmes du ſecond ordre*, enveloppant des radicaux complexes, il faut, avant que de leur appliquer aucune regle d'*integration* ou de reſolution, les développer en Series infinies.

C'étoit donc aux Anglois d'executer la ſeconde Partie de l'Ouvrage de M. de l'Hôpital, & c'eſt préciſément ce que vient de faire le merveilleux *M. Stone*, dans l'Ouvrage dont on donne ici la traduction. Cet Auteur, l'admiration de l'Angleterre même, commence d'être connu en France par l'Extrait que les Mémoires de Trevoux donnerent de ſon Livre en 1732, *Janvier*, *page* 103, & par la Lettre de *M. le Chevalier de R. au P. C.* inſerée à la *page* 109 de ces Mémoires à la ſuite de l'Extrait.

Comme c'eſt cette Lettre & cet Extrait qui ont fait ſouhaiter au public la Traduction de l'Ouvrage Anglois, & que l'Hiſtoire de M. Stone eſt ſinguliere, on rapportera ici la Lettre de M. de R. telle qu'elle a paru dans les Mémoires cités.

*Lettre de M. le Chev. de Ramſay Membre de la Societé Royale d'Angleterre, au P. Caſtel Membre de la méme Societé.*

» Le véritable genie ſurmonte tous les deſavan-
» tage de la fortune, de la naiſſance, de l'éduca-
» tion ; *M. Stone* en eſt un rare exemple : né fils du
» Jardinier du Duc d'*Argyle*, il parvint à l'âge de 18
» ans, ſans ſçavoir lire ; ſon pere ne ſçavoit pas lui
» apprendre ſon métier de cette maniere élevée,
» qui rend le jardinage & l'agriculture une partie
» très-utile & très-noble de la Coſmographie & de la
» Phyſique.

» Par hazard, un domeſtique ayant appris au
» jeune *Stone* les lettres de l'Alphabet, il n'en fallut
» pas davantage pour faire éclore ſon génie & pour
» le developper. Il s'appliqua lui-même, il étudia,
» il parvint aux connoiſſances de la plus ſublime
» Géometrie, & du calcul, ſans maître, ſans con-
» ducteur, ſans autre guide que le pur génie.

» A l'âge de 28 ans il avoit fait tous ces progrès
» ſans être connû, & ſans connoître lui-même les
» prodiges qui ſe paſſoient en lui.

» Mylord Duc d'*Argyle*, qui joint à toutes les
» vertus militaires, & à tous les ſentimens d'un He-
» ros, une connoiſſance univerſelle de tout ce qui
» peut orner & perfectionner l'eſprit d'un homme de
» ſon rang, ſe promenant un jour dans ſon jardin,
» vit ſur l'herbe le fameux Livre du Chevalier Nevv-
» ton en Latin. Il appella quelqu'un pour le ramaſ-

» ſer & le reporter dans ſa Bibliotheque.

» Le jeune Jardinier lui dit que ce Livre lui ap-
» partenoit : *A vous*, répondit le Mylord ? *Entendez-*
» *vous la Géometrie, le Latin, M. Newton ? J'entends*
» *un peu de tout cela*, repliqua *Stone* avec un air de
» ſimplicité fondé ſur l'ignorance profonde de ſes
» propres talens, & de l'excès de ſon ſçavoir.

» Mylord Duc fut très-ſurpris : mais comme il a
» le goût des ſciences, il daigna entrer en conver-
» ſation avec le nouveau Géometre : il lui fit plu-
» ſieurs queſtions, & demeura étonné de la force,
» de la juſteſſe, & de la candeur de ſes réponſes.

» *Mais comment*, dit le Mylord, *és tu parvenu à*
» *toutes ces connoiſſances ?* L'autre répond : *Un dome-*
» *meſtique m'apprit, il y a dix ans, à lire : A t-on beſoin*
» *de ſçavoir autre choſe que les 24 letttres pour apprendre*
» *tout ce que l'on veut ?* La curioſité du Duc redouble ;
» il ſoupçonne que les démarches de ce genie mer-
» veilleux étoient encore plus ſurprenantes que ſes
» progrès ; il s'aſſeoit ſur un banc, & lui demande
» le détail de tout ce qu'il a fait pour devenir ha-
» bile.

*J'appris d'abord à lire*, dit Stone, *les Maſſons tra-*
» *vailloient alors à votre maiſon : je m'approchai d'eux un*
» *jour, & je vis que l'Architecte uſoit d'une regle, d'un*
» *compas, & qu'il calculoit. Je demandai ce qu'il faiſoit-*
» *là, & à quoi tout cela étoit bon ; & je compris qu'il*
» *y avoit une ſcience que l'on appelloit Arithmetique ; j'a-*
» *chetai un Livre d'Arithmetique, & je l'appris.*

» *On m'avoit dit qu'il y en avoit une autre appellée Géo-*
» *metrie : j'achetai des Livres, & j'appris la Géometrie.*

» Je

» *Je vis à force de lire qu'il y avoit de beaux Livres ſur* » *ces deux ſciences en Latin : J'achetai un Dictionaire, &* » *j'appris le Latin. J'appris auſſi qu'il y avoit de beaux Li-* » *vres de même eſpéce en François : J'achetai un Dictio-* » *naire, & j'appris le François. Voilà, Monſeigneur,* » *tout ce que j'ai fait, il me ſemble qu'on peut tout ap-* » *prendre quand on ſçait les vingt-quatre lettres de* » *l'Alphabet.*

» Ce recit charma Mylord Duc. Il tira ce ge- » nie merveilleux de l'obſcurité ; & il le pourvut » d'un emploi qui lui laiſſe tout le tems de s'appli- » quer aux Sciences. Il découvrit en lui le même » génie pour la Muſique, pour la Peinture, pour » l'Architecture, pour toutes les ſciences qui dépen- » dent du calcul & des proportions.

» J'ai vû le ſieur *Stone*. C'eſt un homme d'une » ſimplicité admirable. Il ſçait à préſent qu'il ſçait : » mais il n'en eſt pas enflé. Il eſt poſſedé d'un amour » pur & déſintereſſé pour la Géometrie. Il ne ſe ſou- » cie pas de paſſer pour Géometre. Le bel eſprit & » la vanité n'ont aucune part aux travaux infinis qu'il » ſubit pour exceller dans ce genre. Il mépriſe auſſi » la fortune, & m'a ſollicité vingt fois de prier My- » lord de lui donner un moindre emploi, qui ne » valloit que la moitié de celui qu'il a, afin d'être » plus ſolitaire, & moins diſtrait de ſes études fa- » vorites. Il découvre quelquefois, par des métho- » des qui lui ſont propres, les mêmes verités que » d'autres ont déja trouvées. Il eſt charmé de voir » qu'il n'en eſt pas l'inventeur, & que les hommes » ont fait plus de progrès qu'il ne croioit. Loin d'ê-

» tre plagiaire, il attribuë les ſolutions ingénieuſes » & admirables, qu'il donne de certains problêmes, » aux indices qu'il en trouve dans les autres, quoi- » qu'elles n'en découlent que par des conſéquences » fort éloignées, &c. »

Sur cet expoſé auſſi naïf qu'élegant, on peut croire que l'illuſtre Auteur de l'Analyſe des Infiniment Petits, ne dedaigneroit pas d'avoir pour continuateur de ſon Ouvrage, au défaut de M. Leibnis, un Géometre du genie & de la capacité de M. Stone, qui a d'autant mieux rempli le plan général de l'Ouvrage, & les premieres vûës de l'Auteur, qu'il n'a pas été plus que lui ſervilement Géometre, & homme d'une ſeule étude & d'une ſcience unique.

Car, ſi toutes les ſciences ſe tiennent par la main, & ont beſoin les unes des autres pour ſe perfectioner & ſe développer, la Géometrie plus que toute autre, eſt une ſcience ſéche & roide, qui ne ſe manie point elle-même, & ne ſçauroit ſe retourner ſans le ſecours d'un peu de Litterature, de Logique, & même de Rhetorique, qui eſt une Logique ornée. Comment parler Géometrie, en effet, ſi on ne ſçait pas parler ? Et comment écrire ſur quoique ce ſoit, ſi on ne ſçait pas écrire ?

Le Calcul eſt une belle & bonne choſe ſans doute, & il a fallu autant de genie pour l'inventer & pour le perfectioner, que pour aucune autre partie de la Géometrie. C'eſt une partie de la Géometrie en effet, & une troiſiéme partie : Car cette ſcience en a trois bien décidées, calcul, analogie & meſure dont les deux premieres ſont un moyen pour arriver à la

troiſiéme. Le calcul eſt une partie utile, neceſſaire, indiſpenſable même, au moins dans la pratique. Dans la théorie même il abrege l'expreſſion des penſées, il en donne les reſultats : il ſoulage ſur-tout la mémoire & le génie. C'eſt même une ſorte de mémoire locale, & un ſupplément de génie.

Et par-là même il eſt admirable pour les commençans, qui ne ſont pas encore capables d'une forte attention, & peut, étant bien ménagé, beaucoup contribuer à leur donner cette attention, & à les accoutumer à penſer. Il eſt peu d'eſprits novices par exemple, qui ſans calcul puiſſent franchir le ſecond Livre d'Euclide, ou même la 47$^{e}$ propoſition de ſon premier Livre, & avec ce ſecours c'eſt tout ce qu'Euclide à de plus facile.

Le calcul eſt bon pour toutes les extremités d'eſprits & de génies. Il fait des merveilles entre les mains d'un genie inventeur qui travaille de tête, & qui embraſſant pluſieurs idées en même-tems, eſt ſoulagé d'en confier quelques-unes à des ſymboles abregés & inarticulés qui ne lui diſent mot, & de replier de moment en moment le fil d'un trop long raiſonnement, en prenant les reſultats & comme des ſommes ou des produits de ſes opérations.

En un mot, outre la pratique qui ne peut s'en paſſer, le calcul eſt neceſſaire à tous ceux qui ne ſçavent pas, ou qui ne peuvent pas ou qui ne veulent pas beaucoup penſer. C'eſt une eſpece de machine, ou de Cric géometrique qui etaye l'eſprit, en lui donnant un point fixe qui lui aide à s'élever plus haut ſans trop d'effort ni de contention.

Auſſi n'a t-on jamais douté que les Anciens, les Appollonius & les Archimedes n'euſſent leur Analyſe & leur calcul, dont on trouve en effet chez eux quelques veſtiges, & pour le moins les ſolides fondemens dès le ſecond Livre d'Euclide qui n'eſt qu'un calcul enveloppé. Or ce n'eſt pas pour honorer beaucoup les Anciens qu'on leur attribuë du calcul. On croiroit au contraire les trop relever au-deſſus de la nature humaine, que de les exempter de ce ſecours. Plus on leur prête de connoiſſance & d'uſage du calcul, plus on prétend leur dérober de force de génie. Ils étoient hommes ſans doute comme les autres.

Le grand avantage du calcul eſt, lorſqu'on a fait une découverte, pour en ſaiſir les branches, les reſultats, les corollaires; pour en faire les applications, en détailler les divers cas; pour la rendre ſenſible par des exemples, en épuiſer toutes les veines: pour l'élever même plus haut ſans trop guinder le raiſonnement, l'étendre ſans verbiage, la géneraliſer ſans trop d'abſtraction. Et c'eſt-là que les nouveaux calculs, l'Analyſe des Infiniment Petits, le calcul differentiel de M. de l'Hôpital, le calcul integral de M. *Stone* triomphent, brillent, & paroiſſent dans tout leur beau. Soyons équitables, formons-nous des idées juſtes de toutes choſes, & ne parlons de la Géometrie que ſuivant les loix ſcrupuleuſes de la plus exacte verité. Meſurons, peſons, comptons, évaluons toutes choſes au plus juſte.

Lorſque par les conditions heureuſement combinées d'un problême élevé, on a conſtaté la nature

Géomettique d'une courbe, & que l'Analyſe Carteſienne venant au ſecouts d'un génie épuiſé par un effort de raiſonnement & d'invention, en a renfermé les proprietés caracteriſtiques dans une équation, on acheve par les formules du calcul differentiel d'en détetminer à l'aide des ſous-tangentes & des ſous-perpendiculaites tous les points de contour, les inflexions, les nœuds, les plis & les replis les plus tottueux, l'extenſion en un mot & le développement entier; & tout de ſuite on quarre, on cube, on rectifie, on meſure par le calcul integral, & on épuiſe la mine ouverte par le génie.

Car, après avoir rendu de bonne foi au calcul la juſtice qui lui eſt dûë, la même équité, la même bonne foi, le même eſprit de verité Géometrique exige qu'on reconnoiſſe, que c'eſt le génie enfin qui dans tout genre de ſciences & d'opérations d'eſprit, fait les découvertes & les perfectionne: & que c'eſt outrer les choſes, faire tott à ſon jugement, impoſer à celui des autres, fermet la porte aux découvertes, & nuite infiniment au progrès de la ſcience, que de donner le ſupplément du génie pour le génie même, le moyen pour la fin, & la troiſiéme partie de la Géometrie pour le corps complet de la Géometrie, comme on ne l'a que trop fait dans ce derniet ſiecle.

Il eſt vrai que le calcul y a pris de merveilleux accroiſſemens, & y eſt monté peut être auſſi haut qu'il puiſſe aller: ce qu'on ne peut pas dire de la Géometrie en général qui eſt infinie dans ſon étenduë, au lieu que ces progrès mêmes du calcul, prouvent qu'il a comme atteint ſes dernieres bornes.

Pluſieurs circonſtances ont conrribué au grand éclat des nouveaux calculs, & à l'eſpece d'ébloüiſſement qui a ſaiſi les Géometres en leur faveur : leur grande perfection n'a peut-être pas cependant été la principale cauſe de cette eſpece d'entouſiaſme ou d'exraſe. Le calcul s'étoit perfectionné comme rout le reſte, ſucceſſivement, lentement, de proche en proche, & par pluſieurs mains.

Les Anciens en avoient poſé les fondemens Géometriques. *Diophante* & ſes Commentateurs, ſur-rout le célebre *Bachet de Meziriac* l'avoient développé de Géometrique en Arithmetique, & d'Arithmetique en Algebrique, avec quelques ſemences d'Analyſe. Mais *Viete* avoit pouſſé beaucoup plus loin l'Analyſe dont il eſt comme l'Auteur : & tout de ſuite *Harriot*, *Ougtred*, *& Deſcartes* plus que tout autre, l'avoient monté à la grande Analyſe qui ne pût déſormais monter plus haur ſans devenir tout-à-fait tranſcendante.

Mais à force de s'éloigner de ſon origine Géometrique, le calcul devenoit inutile pour la Géometrie, dégenerant en pures abſtractions, en ſubtilités, en pointilleries, en myſteres, en chymeres, en viſions; ſi Deſcartes par un trait de haute intelligence, ſentant que toutes les extremités ſe touchent, & que la fin rappelle le commencement dans le ſyſtême circulaire qui regne par tout, n'eût comme replié ce calcul Analytique ſur lui-même pour le ramener au Géometrique d'où il étoit parti, & ne nous eût appris à appliquer l'Algebre à la Géometrie.

Ce fut ce repliment important & ce retour du calcul à ſon origine qui le mit en état de s'élever encore plus haut ; & l'on pourroit prouver, que ſans cela le calcul prenoit un train d'abſtraction qui ne l'eût fait aboutir qu'à une tranſcendance purement méthaphyſique, ſans aucune utilité pour aucune ſcience ſolide.

Mais en l'aſſociant à la Géometrie on lui donna un contrepoids qui l'empêcha de s'évaporer ; on le rendit vrai & réel ; & la tranſcendance où il s'éleva, ne le mit point hors des vrayes bornes de la Géometrie, elle le contint même dans celles de la plus ſaine Phyſique, malgré l'infini qui devint ſon objet, & même parce que l'infini devint ſon objet.

On fut redevable de cette tranſcendance à deux grands hommes, MM. *Leibnis* & *Newton*, un peu prevenus tous deux, celui-ci par ſon Maître le celebre *Barrow*, celui-là par M. *de Fermat*, ſans parler de MM. *Wallis*, *Huguens*, *Bernoulli*, *Cheyne*, *de l'Hôpital*, *Varignon*, *Stirling*, *Tſchirnaus*, *&c.* & diversautresqui les ont merveilleuſement ſecondés. Car voilà à peuprès l'Hiſtoire abregée de tout le calcul.

Mais cette *tranſcendance* même, & le grand nom de *Calcul Infiniteſimal* qui ont conſommé l'ébloüiſſement, n'en ont pas cependant été la premiere ni la principale cauſe. Ce fut d'abord le grand éclat du ſyſtême Phyſique de Deſcartes qui, rejailliſſant ſur ſon Analyſe, qu'on auroit peut-être ſans cela raiſonnablement eſtimée, offuſqua tous les yeux, & leur fit paroître le calcul Algebrique comme le grand complement de la Géometrie.

L'ombre que l'envie & l'ignorance avoient jettée ſur la premiere ébauche du tableau de ce grand homme, ne ſervit pas peu dans la ſuite à le rehauſſer. On commença par combattre cette Phyſique & cette Analyſe avec une eſpece de fureur; on les adopta bien-tôt avec une aveugle ſuperſtition, & après avoir comme exilé cet Auteur de ſa Patrie & l'avoir forcé de mourir dans une Terre Etrangere, on lui décerna des ſtatuës.

» Deſcartes qui eſt mort à Stokolm en Suede le » 11 Février 1650, *diſoit le docte Naudé pag.* 125, » *du Naudæana*, étoit un homme de mauvaiſe » mine, & qui n'avoit rien d'agréable. S'il a laiſſé » quelque choſe à imprimer, ce ſera M. *Piques* qui » en aura le ſoin: il avoit bien des viſions dans ſa tête » qui ſont mortes auſſi-bien que lui. »

Naudé, comme on voit, avoit aſſez de mémoires pour y loger les ſiecles paſſés, car c'étoit un érudit dans les formes; mais il avoit peu de cette *faculté imaginatrice*, qui prévoit les ſiecles à venir. Quelques années plus tard, il auroit été Carteſien & demi. Il étoit de ces beaux eſprits qui marchent les premiers avec aſſurance à la tête des Anciens, & les derniers à la queuë des Modernes. Deſcartes même en mourant ne lui avoit pas ouvert les yeux, la fauſſe ſcience ayant droit ſeule de ſurvivre à l'envie.

Au défaut de Naudé aſſez d'autres emboucherent la Trompette, & pour reparer, quoiqu'un peu tard, les excès de mépris & d'injuſtice, dont on avoit accuëilli la perſonne même de Deſcartes, on prodigua à ſon nom les mêmes excès d'éloges & de déference.

rence. C'étoit peu de lui décerner des ſtatuës : on fit main-baſſe ſur celles des anciens Philoſophes & des modernes qui en avoient mérité ou qui en méritoient, afin que la ſienne s'élevât au deſſus de tout, & que rien ne partageât ſa gloire.

Et, comme ſelon l'oracle, à celui qui a on donne ce qu'il n'a pas, & qu'à celui qui n'a pas on ôte même ce qu'il a, on ne crut pas après avoir placé Deſcartes au-deſſus d'*Ariſtote*, devoir l'abaiſſer au niveau d'*Archimede*, & ſa préeminence dans la Philoſophie décida de celle dans les Mathematiques. L'ébloüiſſement étoit tel, que les eſprits les plus moderés & les plus équitables étoient comme entraînés par le torrent, & forcés, par un principe même de droiture, d'encenſer l'Idole du ſiecle.

Les Anciens ſont pourtant de grands hommes, diſoit une perſonne que ſa naiſſance doit rendre exempte de tout ſoupçon de baſſeſſe à cet égard, mais que le préjugé commun dominoit; les Anciens ſont des hommes admirables, mais admirables par ce ſeul endroit que, *quoiqu'en diſe Viete, ils ne ſe ſont point égarés.* Car du reſte, » ils n'ont pas été loin, & » ils ont marché par de longs circuits .... Ils n'ont » touché qu'à fort peu de courbes, ils n'y ont même » touché que légerement.... Ce ne ſont par tout que » propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font » appercevoir aucune methode reguliere & ſuivie. » Voilà pour les Anciens.

Pour ce qui eſt des Géometres du moyen âge, depuis le renouvellement des ſciences juſqu'à Deſcartes, on voit aſſez que tout ce qu'ils ont pû faire

pour enchaîner les ſiecles anciens avec les modernes, & mettre ceux-ci par le moyen de ceux-là en état d'aller plus loin, a été de reprendre la premiere trame, de foüiller dans les bibliotheques, de deterrer des lambeaux de manuſcrits, de les déchifrer, de les confronter, de les corriger les uns par les autres, de les ſuppléer, de les éclaircir, de les traduire, de les commenter, de les imprimer.

Tout cela a-t-il pû même s'executer ſans beaucoup de génie, & ſans enfanter de vrayes & de grandes découvertes, dont l'Imprimerie, les taches du Soleil, les lunettes, &c. pouvoient immortaliſer ces ſiecles laborieux & bien-faiſans auprès des beaux Eſprits, autant qu'auprès des honnêtes gens qui ſont touchés du bien public?

N'en jugeât-on même que par un certain reſultat de renommée, les Mathematiques ne doivent-elles rien aux *Galilées*, aux *Torricellis*, aux *Keplers*, aux *Cavallieris*, aux *Scheiners*, aux *Guldins*, aux *Clavius*, aux *Midorges*, aux *Gregoires de ſaint Vincent*, aux *Saraſſas*, aux *Lalouberes*, aux *Wallis*, &c. pour ne daigner pas même en dire un mot de mépris dans une Hiſtoire des découvertes?

Ils n'ont ſans doute rien fait pour le calcul, & le calcul fait tout déſormais en Mathematique. Tous ces Auteurs *ſont de grands hommes* en bloc, *& ſans doute d'auſſi grands hommes que les Anciens*, mais *qui en ſont tous demeurés-là*, là où les anciens en étoient demeurés; parce que » par une admiration ſuperſtitieuſe » pour leurs ouvrages, ils ſe ſont contentés de les » lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'au-

» tre uſage de leurs lumieres que ce qu'il en falloit » pour les ſuivre, ſans commettre le crime de pen- » ſer quelques fois par eux-mêmes, & de porter » leur vûë aux delà de ce que les Anciens avoient dé- » couvert. Ainſi bien des gens travailloient, ils écri- » voient, les Livres ſe multiplioient, & cependant » rien n'avançoit. Tous les travaux de pluſieurs ſie- » cles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpe- » ctueux Commentaires, & de traductions repetées » d'originaux ſouvent aſſez mépriſables. »

Et voilà les débris ſur leſquels s'éleve enfin la ſtatuë du grand Deſcartes, avec cette inſcription épiphonematique. *Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer :* Ce qui atteint preſqu'au *ſiluit terra.* Car en bon François cela veut dire, qu'avant Deſcartes les hommes, hommes Romains, hommes Grecs, les Ariſtotes, les Platons ſans difficulté ; mais les *Ciceron*s, mais les *Virgiles*, mais les *Homeres*, mais les *Demoſthenes*, &c. ne s'aviſoient pas d'être hommes, hommes raiſonnables, ni preſque d'être animaux. Car les animaux ont des yeux, & malgré l'*Automatiſme* Carteſien, s'aviſent quelques fois de les ouvrir, pour faire au moins ſemblant de voir.

Mais après Deſcartes, permis à chacun d'avoir des yeux & d'en uſer, pour tourner toute la Géometrie en calcul comme toute la Phyſique en Hypotheſes : &, comme ceux qui mirent la main à ce calcul étoient vivans & aſſez vifs ſur leurs prétentions, on vit les découvertes ſe multiplier & les inventeurs joüir de leurs droits : c'étoit le ſiecle des découvertes, tout le monde étoit admis à en faire.

Car les Anciens n'avoient enfanté que de ſerviles copiſtes, & Deſcartes n'enfanta que de ſublimes inventeurs.

On conſentit même à trouver en leur faveur des défauts dans le calcul de Deſcartes. Mais *au défaut de ce calcul de Deſcartes, eſt ſurvenu celui du célebre M. de Leibnis :* lequel au reſte fut aſſez peu ébloüi lui-même comme on verra dans la ſuite & aſſez admirateur de la Géometrie ancienne, pour rendre juſtice à pluſieurs de ſes prédeceſſeurs : Car *M M. Bernoulli ont été les premiers qui ſe ſont apperçûs de la beauté de ce calcul.* Et M. Nevvton trouve dans cet éloge une place dont on ſeroit curieux de ſçavoir s'il en fut fort touché, parce que, dit-on, *ſon excellent Livre intitulé : Philoſophiæ naturalis principia Mathematica, eſt preſque tout de ce calcul.*

La raiſon de douter ſi M. Nevvton agréa cet éloge, eſt que les Anglois, quoiqu'ils ſoient peut-être les plus forts calculateurs de l'Europe, & que M. Nevvton ſoit un autre pere du calcul, très-comparable à Deſcartes ; ces profonds Géometres n'ont pourtant jamais eſtimé ce calcul que ce qu'il vaut, jamais ils ne l'ont élevé au-deſſus de la méthode ancienne, & M. Nevvton en particulier en a parlé avec aſſez de mépris, juſqu'à le traiter de ſupplément de génie, de reſſource même de petit génie : & il s'en eſt très-peu & preſque point ſervi dans ce Livre, d'autant plus admirable des principes de la Philoſophie, qu'on n'avoit point lû ſans doute lorſqu'on a avancé qu'il étoit *tout de ce calcul.*

Cela eſt ſi inconteſtablement vrai, que ce Livre

ayant en tout 510 pages de la premiere édition, ce n'eſt qu'au milieu & à la 250e page qu'on trouve le fameux Lemme *Datâ fluente*, &c. qui contient le principe immédiat du calcul ſoit direct, ſoit reciproque des fluxions ; & qu'encore ce principe eſt là plûtôt géometriquement démontré qu'analytiquement deduit ; & que dans la ſuite l'Auteur n'en fait preſqu'aucun uſage analytique, & qu'il procede uniquement ſelon *l'ancienne maniere d'Euclide, d'Appollonius, d'Archimede*, qui eſt la ſeule vraiment Géometrique, la ſeule raiſonnée, & démonſtrative, la ſeule qui ſente le genie & qui parle à l'eſprit.

Prenons bien garde : autre choſe eſt inventer le calcul, perfectionner le calcul, donner les principes du calcul : autre choſe, uſer du calcul, calculer. Uſer du calcul, calculer ſuppoſe une connoiſſance, une théorie preliminaire du calcul. Ce n'eſt pas par le calcul qu'on invente ni qu'on perfectionne le calcul : L'uſage du calcul ne peut en donner que la routine, & à la longue peut-être mettre l'eſprit en voye d'en penetrer les principes. C'eſt le génie, la méditation, le raiſonnement qui inventent le calcul comme tout le reſte.

Et ſuivant cela Deſcartes eſt admirable, non pas préciſement pour nous avoir donné du calcul, mais pour l'avoir inventé ou enrichi de ſes découvertes, & ſur-tout pour en avoir reduit en art l'application à la Géometrie. Mais ces découvertes il pouvoit abſolument nous les donner ſans tant de calcul, ſi ſon but n'avoit pas été de nous donner en effet la maniere de calculer, & comme la perſonne même

du calcul ; la perſonne, dis-je, ou le corps même du calcul plûtôt que l'eſprit.

Car il eſt aſſez ſingulier que les Géometres anciens nous ayant conſtament donné l'eſprit du calcul, ſes principes, ſa pure théorie démonſtrative plûtôt que ſon corps, ſon uſage, ſes regles ; Deſcartes ait pris tout le contrepied, & ait affecté d'en donner les regles, les reſultats, les applications ſans preſqu'aucune théorie ni démonſtration. Les Géometres rigides du tems blâmerent fort cette méthode dans le fond peu géometrique, & qui alloit plûtôt à la gloire de l'Auteur qu'à l'inſtruction du public : On accuſa Deſcartes d'avoir uniquement voulu par-là ſe rendre admirable. On l'excuſe cependant ſur ce qu'il ne vouloit pas faire un Livre trop long, & ſur ce qu'il prétendoit ſe vanger par ce petit artifice de ſes critiques importuns, en leur donnant des énigmes à déchiffrer. Il y réuſſit au-delà de ſes eſperances.

Pour revenir à M. Nevvton, ſon Livre des Principes ne contient guere non plus que l'eſprit & les ſemences du calcul, & s'il nous en a donné ailleurs quelques morceaux, ce ſont de petits traités qu'il n'a même vraiſemblablement faits, que pour ſe conformer, contre ſa propre inclination, au goût regnant. Il voyoit que le calcul avoit tout à fait pris le deſſus, qu'on n'étoit déſormais réputé Géometre qu'à ce titre, qu'on ne l'avoit aſſocié lui-même aux Géometres modernes que ſur ce pied & en ſuppoſant que ſon Livre *étoit tout de calcul* ; qu'il étoit ſur le point de ſe voir enlever toute ſa gloire par M.

Leibnis, qui s'étoit lui-même tout à fait livré au calcul, en voyant ſes premiers eſſais mieux accueillis qu'il ne l'avoit prévû. M. Newton ſe prêta donc au calcul.

Et alors la Géometrie ne fut plus qu'un reſſaſſement de lettres & de ſymboles, de tables & de formules, de tarifs, en un mot, & de comptes faits. On auroit pris le cabinet d'un Géometre pour un Bureau de Finance, ou pour un Comptoir de Commerce. Encore ſi c'eût été un vrai commerce ou une bonne finance, la réalité d'un calcul effectif dédommageroit le cœur de l'humiliation de l'eſprit.

Mais avec les aridités & les épines d'une Algebre triplement indéchifrable, on ſe trouvoit encore condamné au ridicule emploi de calculer éternellement à faux ou à vuide, d'accumuler lettres ſur chiffres, ſymboles ſur ſignes ſans aboutir de la vie à aucun vrai reſultat, dont on pût joüir : quoiqu'il paroiſſe auſſi eſſentiel à un Calculateur de profeſſion de dire : *Je calcule, donc j'ai* ; qu'à un homme vivant de dire : *Je penſe, donc je ſuis.*

On peut comparer le calcul dans la Géometrie aux troupes auxiliaires dans les armées Romaines. Tandis que ces troupes ne furent qu'auxiliaires & le tiers tout au plus d'une legion, Rome s'agrandit & conquit l'Univers. Mais la pareſſe gagna les legions avec les richeſſes des nations : on dépoſa donc le caſque, la cuiraſſe & le courage : & les troupes étrangeres & barbares, les Huns, les Gots, les Viſigots, les Arabes ſous le nom d'auxiliaires, gagnerent les armées, les remplirent, les anéantirent ; & le tiers

devenant le tout, le tout fut reduit à rien, & il n'y eut plus enfin d'Empire Romain.

C'eſt le train que prend la Géometrie depuis qu'elle eſt métamorphoſée en calcul Arabe & preſque Oſtrogot, & que le tiers y eſt devenu auſſi le tout. La tête preſque delivrée du ſoin de penſer, devient pareſſeuſe, & l'eſprit laiſſe aller les doits : on ſe repoſe de tout ſur des formules : on ſe contente de démonſtrations *à poſteriori*, qui ne font juger du vrai des choſes que par l'évenement, & non par le principe interieur & par l'idée. Exige-t-on même des démonſtrations d'aucune eſpece ?

Au défaut de l'évidence on ſe paye fort bien de la certitude, comme le Quinze-vingt qui ſubſtituë le toucher au coup d'œil, mais malgré lui. La certitude eſt même remplacée par l'induction, c'eſt-à-dire, encore le toucher précis par un tatonnement vague. Les exemples ſervent de preuves, l'explication de raiſonnement. Les principes les plus fondamentaux paſſent de bouche en bouche, & de Livre en Livre par ſimple voye de tradition.

Ainſi, loin que Deſcartes ait été l'époque, au moins en Géometrie, de l'ouverture des yeux & des eſprits, il eſt préciſement arrivé ſans que ce grand homme en ſoit pourtant reſponſable, & même parce qu'il étoit grand homme & qu'il avoit eu lui-même les yeux & l'eſprit très-ouverts, il eſt arrivé ce qui arrive après tous les grands hommes, après les inventeurs, après les peres qui ont amaſſé du bien, après les Rois mêmes qui ont agrandi leurs Etats, qu'on a joüi de ſes tréſors & de ceux de quelque

ques autres dont nous allons parler, ſans ſe mettre en peine de les augmenter. La Géometrie s'eſt trouvée aſſez riche dans le dernier ſiecle pour qu'on s'amuſât à la remanier par des formules & des inductions. Un riche heritier paſſe ſa vie à compter ſes thréſors & à les recuëillir.

On n'outre rien ici : on prie les Géometres de ne ſe point roidir là-deſſus : on ne veut offenſer perſonne : on veut ſimplement dire une verité utile, & la rendre bien ſenſible, afin d'ouvrir les yeux ſur un abus qui perdra enfin une ſi belle ſcience ſi on perſiſte de s'y opiniâtrer. Les Géometres modernes eux-mêmes ne conviennent-ils pas tous les jours de ces deux ou trois points capitaux ?

1°. Que le calcul ſoulage l'eſprit en le déchargeant du ſoin de penſer : & peuvent-ils nier qu'il ne faille penſer pour perfectionner veritablement une ſcience auſſi profonde que l'eſt la Géometrie ? 2°. Ne conviennent-ils pas que les démonſtrations des nouveaux calculs ne ſont jamais qu'*à poſteriori* ? 3°. Et, ce qui devroit tout-à-fait deſſiller les yeux en faveur de la Géometrie ancienne, n'ont-ils pas mille fois remarqué de bonne foi que dans les concluſions de la Géometrie moderne, l'eſprit aime à ſe retrouver avec celles de l'ancienne Géometrie, & qu'il n'y a que l'uniformité du but auquel ces deux Géometries aboutiſſent, qui raſſure tout-à-fait ſur la ſuſpenſion & l'incertitude même où laiſſent les nouveaux calculs, où laiſſe même en général toute ſorte de calcul, ſur-tout l'Algebrique qui n'a rien de lumineux ?

L'ingenieux *M. de Fontenelle*, qui eſt de tous les

Auteurs modernes un de ceux qui ont le plus & le mieux philoſophé ſur la nature des nouveaux calculs, convient partout, dans ſon élegante Hiſtoire de l'Académie, & dans ſes nouveaux Elemens de la Géometrie de l'Infini, du défaut que nous remarquons ici dans ces calculs. *Il eſt arrivé dans la haute Géometrie*, dit-il, *une choſe bizarre, la certitude a nui à la clarté.* Il ajoute dans la Préface de ſes Elemens. *Le calcul n'eſt gueres en Géometrie que ce qu'eſt l'experience en Phyſique, & toutes les vérités produites par le calcul, on les pourroit traiter de vérités d'experience.*

Ce célebre Auteur attribuë cette incertitude ou ce défaut de clarté à l'Infini : mais ſans Infini ſa propoſition eſt toujours vraie, que le calcul n'a qu'une certitude d'experience & comme d'évenement. L'Infini peut bien augmenter l'incertitude & l'obſcurité. Mais il eſt vrai-ſemblable que, ſi cet Infini étoit manié ſelon la methode des Anciens, géometriquement & ſans calcul, par principes & non par regles, comme l'ont fait M. Nevvton dans ſes principes, & Grégoire de S. Vincent dans ſon grand *ouvrage géometrique*, l'Infini n'auroit au moins que ſes propres nuages ou n'en auroit point du tout, n'en ayant jamais eu dans ces deux Auteurs, ni dans Archimede qui a travaillé ſur le même fonds, mais géometriquement, par idée & par raiſonnement.

Nous n'avons encore touché que la premiere & dans le fond la moindre cauſe de l'ébloüiſſement des modernes en faveur de leurs calculs. Cet ébloüiſſement n'auroit été ni ſi durable, ni ſi univerſel, s'il n'avoit été fondé ſur quelque choſe de plus réel, de

plus ſubſtantiel qu'une méthode, une maniere, *un mode*, & *une mode* par conſéquent, dont on ſeroit bien-tôt revenu comme on revient de toutes les modes. Voici le fait hiſtorique.

Les circonſtances, où le calcul reçut ſa perfection, furent très-favorables pour lui donner un air brillant de grandes découvertes géometriques. Car préciſément dans le même tems que *Deſcartes* donnoit ſon Analyſe, *Gregoire de S. Vincent* qui vivoit avant & qui a vêcu après Deſcartes, enrichiſſoit la Géometrie d'un nombre inconcevable de vérités nouvelles, de vûës profondes, de recherches étenduës, de principes féconds, de methodes même génerales & très-regulieres.

Et comme toute, ou preſque toute la Géometrie, ſur tout la plus élevée, peut ſe mettre en calcul, parce qu'après tout le calcul n'eſt qu'une maniere, une mode, un habit, & que ce calcul arrivé à ſa perfection ne demandoit qu'à ſe réaliſer, à s'appliquer à quelque ſujet, à ſe ſignaler même par des ſujets illuſtres, toute la théorie de Gregoire de S. Vincent fut jettée dans ce moule, paſſa par cette filiére, fut revêtuë en un mot de calcul, & ſi bien maſquée que le renouvellement joint à la nouveauté réelle, fit paroître le calcul comme un Perou inépuiſable, dont les premieres veines ſembloient en annoncer de ſecondes & de troiſiémes à l'infini.

Gregoire de S. Vincent étoit un Auteur vaſte, profond, original, & par conſequent difficile : Il ne fut permis qu'aux Géometres du premier vol d'y puiſer. Mais les anciennes découvertes furent un butin

pour tout le monde, & le calcul ne ſe refuſant à perſonne, il n'y eut plus de Géometre qui ne fût admis à ſe ſignaler par quelque découverte. Archimede, Appollonius, Euclide, tout fut refondu, & reprit un air de nouveauté par le moyen du calcul.

Ajoutez à cela les ſciences Phyſico-Mathematiques anciennes & modernes, les découvertes de Kepler, de Guldin, de Galilée, de Torricelli, & ſurtout celles du profond & inépuiſable Nevvton, qui ſans être de calcul, ou même parce qu'elles n'en étoient pas encore, ne ſembloient reſpirer que le calcul, ne demander que du calcul pour être développées & comme reduites en pratique.

Car c'eſt une réfléxion qui ne paroît rien, & qui eſt pourtant ſinguliere, que la Géometrie moderne eſt dans ſon propre caractere & par ſa forme toute problématique, une Géometrie pratique qui ſuppoſe par conſéquent une Géometrie théorique, d'où elle eſt évidemment déduite par voye de corollaire & de réſultat.

La Géomettie ancienne étoit preſque toute théorematique, & les modernes mêmes, dans la paſſion qui les animoit de critiquer les Anciens, ont fort blâmé Euclide d'avoir mêlé dans ſes Elemens les problêmes avec les théorêmes, c'eſt-à-dire, la pratique avec la théorie. Il eſt donc très-ſingulier de voir toute la Géometrie moderne ſous une forme problématique. Qu'on ouvre l'Analyſe des Infiniment Petits de M. de l'Hôpital, & de M. Stone; ce n'eſt point la faute de ces Auteurs: C'eſt ſimplement le ſtile du calcul & la marque certaine d'une ſeconde invention.

Seroit-il naturel ſans cela qu'une ſcience auſſi raiſonnable que la Géometrie, qui eſt peut-être la ſeule où la raiſon ait un plein droit de triompher de l'autorité, n'eût d'autre ſtile que ce langage impérieux : *Faites ceci, faites cela, decrivez un cercle, tirez une ligne, formez un angle, tracez une parabole*, & que ſans ſe piquer preſque d'aucune démonſtration raiſonnée, elle n'eût d'autre garand de ſes procedés que le deſpotique mot *ſit pro ratione voluntas?*

Cependant la Géometrie moderne n'étant point théorique par ſon calcul, n'eſt point pratique ni pratiquable non plus par ſon calcul algebrique, analytique, infiniteſimal : & la pratique même de l'Algebre & de l'Analyſe ne peuvent jamais paſſer que pour une très-haute, très-ſublime, très-quinteſſentiée & très-abſtraite ſpéculation.

Mais admirons encore ici les Modernes. Ils nous parlent de *reſpectueux commentaires*, & de *repetitions d'originaux*. Et que font-ils donc depuis près d'un ſiecle, tant en Géometrie à l'aide du calcul, qu'en Phyſique à l'aide de l'hypotheſe, que des commentaires très-reſpectueux & des repetitions preſque litterales, de deux ou trois ou quatre originaux modernes, des anciens mêmes, d'Archimede, d'Appollonius & d'Euclide, tout Euclide qu'il eſt?

On ne blâme point les Modernes de ce procedé, on n'en parle même que pour montrer qu'il n'en faut blâmer perſonne, & que dans le fond ces commentaires, & ces répetitions & ces reſpects ſont dûs aux Auteurs & au public ; que les Auteurs originaux, en ſaiſiſſant la vérité, n'attrappent pas tou-

jours la vraye maniere, la maniere la plus ſimple & la plus demonſtrative de la propoſer. Qu'une choſe utile eſt bonne à dire & à redire cent fois, qu'à force de la remanier on la meurit, à force de la reſaſſer on l'inculque, à force de la faire paroître & reparoître on la rend ſenſible, & qu'enfin nous ſommes redevables à ceux mêmes qui ſe donnent la peine de commenter & de repeter l'*a*, *b*, *c*. Il faut prendre toutes choſes du bon côté, & pour le moins être toujours équitable.

Soyons-le donc tout à fait, & puiſque le calcul n'eſt qu'une petite partie de la Géometrie, ne nous bornons pas au point de vûë dans lequel la premiere partie de l'Analyſe des Infiniment Petits nous a préſenté l'Hiſtoire de cette ſcience : Tâchons dans cette ſeconde Partie de rendre cette Hiſtoire un peu plus complette, en rendant juſtice à ceux qui ſans aucun étalage de calcul n'ont pas laiſſé de contribuer beaucoup à ſa perfection, ou du moins à ſon embelliſſement & à ſon éclat, en contribuant à la perfection de la pure & ſaine Géometrie.

*Les ſections coniques* ſont comme le corps ſolide & ſubſtantiel de cette ſcience. C'eſt-là qu'il en faut toujours revenir. On n'eſt Géometre qu'à proportion qu'on ſe rend profond dans la théorie de ces ſections. Elles ſont le modele de toutes les autres courbes. Celles des degrés pairs ſont *circulaires* ou elliptiques : celles des degrés impairs ſont infinies en étenduë, c'eſt-à-dire, ou *paraboliques* ou *hyperboliques*, ou *parabolo-hyperboliques*. Mais c'eſt plus pour la curioſité ou pour l'ornement de l'eſprit que pour

aucun uſage neceſſaire, qu'on s'amuſe quelquefois à contempler ces autres courbes : On n'en a jamais pouſſé bien loin la ſpeculation : Au lieu que depuis *Appollonius* les *coniques* ont été le grand objet de tous les profonds Géometres.

Ce fut en ébauchant leur théorie que cet ancien Auteur mérita le nom de *grand & de ſubtil Geometre* : Car il eſt vrai qu'il ne l'avoit qu'ébauchée, parce qu'un premier inventeur ne peut pas tout inventer. Il eſt vrai auſſi que les ſciences étant tombées peu après lui, & ne s'étant enfin ranimées que peu à peu & par degrés, comme nous l'avons expliqué, on avoit peu ajouté aux découvertes d'Appollonius juſqu'au ſiecle qui vient de finir : & cela même en rendant la Géometrie peu vaſte, la rendoit peu feconde en nouvelles découvertes. Car plus on a, plus il eſt facile d'acquerir, & ce n'eſt que par le connu qu'on pénétre juſqu'à l'inconnu : l'homme ne fait rien de rien.

Il falloit des génies vigoureux & preſque créateurs qui fuſſent capables de tirer tout de leur propre fonds. Tel fut, on l'oſe dire, parce qu'on va le prouver, le célebre *Gregoire de S. Vincent*, dont on ne s'amuſera point ici à faire l'éloge ni le caractere, mais dont on tâchera de faire connoître les Ouvrages. Il avouë lui-même, malgré ſon extrême modeſtie & ſon reſpect exceſſif pour les anciens, que la lumiere qu'ils nous avoient laiſſée en Géometrie étoit bien foible : *Lumen quod ab antiquis nobis tradita Geometria exhibebat, nimis debile eſſe quam ut, &c.*

Il penſa donc à l'augmenter, & il y réuſſit au

point que ſon ſiecle en fut ébloüi comme nous l'avons dit, & ébloui juſqu'à le méconnoître : Car l'objet qui éblouit, n'eſt pas toujours celui qu'on connoît le mieux ; & l'œil étonné d'un éclat trop vif, cherche des objets plus temperés comme pour s'y repoſer & y tranſporter l'image de celui qui l'a offuſqué. Le Soleil par qui l'on diſcerne toutes choſes ne ſe laiſſe point diſcerner ; & ſi par hazard on s'obſtine quelques inſtans à le contempler, on retrouve enſuite ſon image ſur tout ce qu'on s'aviſe de regarder.

Gregoire de S. Vincent ne fut pas cependant généralement méconnu ; & *Saraſſa* nous apprend que les lettres que ſon maître recevoit de toutes parts, étoient adreſſées au *nouvel Apollonius*, à l'*Archimede moderne*, *au grand Géometre :* Voici les paroles de Saraſſa dans ſa Préface, *eum Archimedem alterum alii, alii Apollonium, magnum Geometram alii litteris inſcriptis & non immeritò paſſim compellent, &c.*

Nous avons perdu la moitié au moins des Ouvrages de cet Auteur, un traité ample ſur la *Quadratrice de Dinoſtrate*, une *Statique* entiere, &c. qui furent brûlées dans l'incendie de Prague au tems des guerres de Boheme. Mais il nous reſte encore deux grands *in-folio*, & même trois ; car il y a un Ouvrage poſthume peu connu. Ces trois volumes contiennent près de 3000 Propoſitions, dont il y en a bien 1500 ſur les Sections coniques, ſur leur nature, leurs proprietés, leurs raports, leur comparaiſon, leur deſcription géometrique ou organique, leurs ſegmens, leurs ſecteurs, ſur tous les aſpects ſous leſquels on peut les enviſager. C'eſt

C'eſt un grand Paradoxe & un Phenomene peut-être unique, qu'un gros Livre, qu'un triple *in-folio*, tout plein de vrayes & de grandes découvertes ſans aucune compilation des ouvrages d'autrui. Auſſi le célebre *Viviani*, qui étoit lui-même un grand & un ſubril Géometre, & qui étoit aſſocié de l'Académie Royale des Sciences de Paris, qualifie ce Livre d'ouvrage vrayement Arhlantique: *In opere verè Athlantico ſummi Geometræ Gregorii à S. Vincentio, è doctiſſimâ, ſpectatiſſimâ, nec unquam ſatis laudatâ, &c.*

C'eſt donc d'abord par un détail étonnant de proprietés des Sections coniques, & ſur-tout par le rapport & la comparaiſon de leurs proprietés générales, que Gregoire a mis la Géometrie en état de s'enrichir, par la richeſſe même qu'il lui a procurée. Mais il ne s'eſt pas borné à ce détail, & il a ſçû lui-même joüir de ſes premieres richeſſes pour en acquerir de nouvelles. Le détail l'a conduit au général, & en nous donnant des découvertes il nous a donné auſſi les méthodes, dont il s'étoit ſervi pour les faire, & dont on s'eſt ſervi d'après lui; je dis les méthodes de génie, de raiſonnement, ſinon de calcul; & peut-être même auſſi celles de calcul, ou pour le moins leurs principes géometriques les plus immédiats.

Partout il nous avertit de la généralité de ſes propoſitions & nous apprend à en faire les applicarions en les faiſant lui-même. Il avoit particulierement étudié les Anciens dans la vûë de découvrir leur Analyſe, celle du moins qui les avoit ſecretement dirigés: & il lui avoit fallu la deviner & preſque la

créer de nouveau, ou peut-être pour la premiere fois. *Methodus enim demonſtrationis*, dit-il, *quâ Archimedes in hâc materiâ utitur uſquè adeò ſecreta eſt & involuta, &c.* Et plus bas, *planè mihi perſuaſeram veriſſimam me reperiſſe viam quâ Archimedes adinvenit, &c.* Il étoit perſuadé, comme bien d'autres, que les Anciens avoient caché leur artifice par un nouvel artifice pour ſe rendre plus admirables à la poſterité : *Antiquis enim valdè ſolemne fuit artificium adinventionis celare, &c.*

Mais il eſt fort douteux s'il y a eû d'autre fineſſe de leur part ; & il paroit plus croyable que tout leur Art ſe reduiſoit à avoir beaucoup de génie & une application d'eſprit convenable ; & que s'ils ont ſupprimé les divers moyens de calcul ou les autres tentatives, dont ils ſe ſont ſervis naturellement pour arriver à leur but, ils l'ont fait comme un Architecte ôte les ceintres & les échafauds, & écarte les maſſons après l'achevement de l'édifice.

Que ſçait-on même ? l'Edifice de la Géometrie des Anciens a été peut-être encore trop ſimple & trop imparfait, pour qu'ils ôtaſſent ces ceintres & ces échafauds ; & peut-être avons-nous dans leurs Livres tout l'artifice géometrique & toutes les méthodes dont ils ſe ſont ſervis, & que nous avons tort d'aller chercher bien loin.

Car ſi le calcul eſt une méthode ou une maniere utile, un outil pour l'invention, le ſecond Livre, & pluſieurs autres morceaux d'Euclide ne ſont qu'un calcul enveloppé, ou plûtôt théorique & purement géometrique. Mais ce n'eſt-là qu'une maniere en ef-

fet & un outil : La comparaiſon, l'analogie, la proportion, le rapport eſt une vraye méthode, un inſtrument, & comme la choſe même en Géometrie, dont tout le fait conſiſte à découvrir des rapports. Pour méſurer les choſes en effet, il faut les rapporter les unes aux autres, les comparer.

On peut abſolument ſe paſſer de calcul dans cette ſcience, ſi ce n'eſt dans la pratique, comme nous avons dit ; & alors même le calcul le plus arithmetique eſt ſuffiſant, le meilleur & le ſeul bien uſuel. Mais on ne peut s'y paſſer de proportions & de rapports bien développés, & en quelque ſorte bien prononcés. Et alors on ne peut accuſer les anciens d'avoir caché leur artifice, puiſqu'ils nous ont laiſſé une théorie diſtincte des rapports, & leur uſage par tout ſenſible.

Tout ce qu'on pourroit dire, c'eſt que cette théorie étoit fort bornée & fort imparfaite, comme s'en apperçut Gregoire de S. Vincent dès qu'il voulut tenter d'aller plus loin. On pourroit aiſément faire voir, dit-il, à la tête de ſon admirable Livre des *Proportionalités*, que la Géometrie eſt-juſqu'ici fort imparfaite : *Mutilam in hodiernam diem & imperfectam eſſe Geometriæ ſcientiam multis argumentis oſtendi poſſet, atque adeo cultores exquirere qui notitiam rerum ſuo labore excludant, &c.* Or le point principal ſur lequel la Géometrie avoit beſoin d'être portée plus loin, c'étoit l'artifice des Proportions : *Inter cæteras verò partes quæ necdum prodierunt, admumerari meritò poteſt pars ea omnis quæ rationum Proportiones continet, & uſum explicat quo Geometricis contemplationibus inſervire queat.*

Ce fut donc pour ſuppléer à ce défaut de la Géometrie, ou de la mérhode Géometrique des Anciens, que cet Auteur compoſa ce Livre des Proportionalités en 172 Propoſirions toutes nouvelles, & qu'il appelle avec raiſon une nouvelle Géometrie, *novam Geometriam concinnare me oportuit ;* de nouveaux ſecours, *novis adjumentis ;* de nouveaux Arts, *novas Artes ;* pour aller plus loin, ſelon la deviſe *plus ultra,* qu'il a fait ſervir d'ame aux Colonnes d'Hercule dans le frontiſpice de ſon Ouvrage.

Tout ce que l'antiquité nous avoit appris ſur les proportions, ſe réduiſoit à des rapports de deux termes, & à des proportions de deux rapports rationels & homogenes. Gregoire nous apprit à faire entrer les diſproportions mêmes & toutes ſortes d'inégalités & de grandeurs heterogenes, incommenſurables, & incomparables même dans les comparaiſons ou analogies Géometriques. Il conſidera les rapports de rapports, les proportions de proportions, le tout avec facilité par le moyen des expoſans ou dénominateurs. Ses proportionalités embraſſent juſqu'à 8, 12, 16, ou plus de termes, ſouvent irrationels & tout-à-fait diſſemblables.

Avant lui Viete & divers Auteurs, bornés au calcul & au rationel avoient établi comme une maxime, que le courbe ne pouvoit entrer en comparaiſon avec le Rectiligne, l'incommenſurable avec le commenſurable, l'infini avec le fini, le plan avec la ligne, le ſolide avec le plan. C'étoit-là une borne poſée, non cependant par les Anciens qui avoient quarré la parabole & la lunule & même en un ſens le

cercle, & rectifié ſa circonference. On ne voit pas même que Deſcartes, tout Deſcartes qu'il étoit, eut penſé à ôter cette borne.

Deſcartes avoit pris la Géometrie d'un autre côté, du côté des problêmes lineaires ou executables par des lignes, & nullement du côté des quadratures qui ſont pourtant le vrai côté; le but de la Géometrie étant de meſurer, & par conſequent de quarrer, de rectifier, de cuber; & les grandes découvertes de la Géometrie ne s'étant faites, comme bien des gens l'ont obſervé, qu'en viſant à ce but general, comme celles de la Chymie en viſant au grand œuvre qui n'eſt pourtant qu'un but chimerique; au lieu que les quadratures ſont un but réel, & même l'unique dernier but.

Gregoire de S. Vincent qui dirigea tous ſes travaux Géometriques de cinquante années vers ce but, ſentit ſon génie captivé par la maxime moderne, & ce fut pour la ſurmonter qu'il compoſa ſes proportionalités. L'incommenſurable ne l'arrêta pas. Il ſçût éviter l'*incommenſurable abſolu*, & reduire à des expoſans rationels l'*irrationel relatif*, & l'infini même à des rapports finis.

Car l'infini devint ſon objet auſſi familier que le fini. Il ſaiſit cet infini par les deux endroits par où le calcul le plus moderne l'a ſaiſi. 1°. Dans le progrès interminable d'une *ſerie infinie*; 2°. en lui-même dans le partage d'une grandeur quelconque en *parties infiniment petites*.

Son Livre des *Series Géometriques* en 177 Propoſitions toutes de lui, eſt ſans doute un Art nouveau,

& une méthode d'invention qui a ſervi de fondement à la principale moitié des nouvelles méthodes de calcul infiniteſimal. La grande occupation de ce calcul a été depuis ce tems-là d'exprimer ces ſeries, tantôt par des nombres Arithmetiques, tantôt par des lettres Algebriques, & enfin par un Algebre Analytique, tout-à-fait tranſcendante & générale, qui eſt l'Ouvrage du grand Nevvton, & où le célebre M. *Stirling* entr'autres s'eſt merveilleuſement ſignalé.

Mais ſi le Livre des Series fut la ſemence prochaine du calcul moderne de ces Series, le Livre *de ductu Plani in Planum*, en 246 Propoſitions fut celle de la ſeconde partie des nouveaux calculs, & pour le moins du calcul integral. On peut regarder ce Livre en effet comme un calcul integral de tête, & du reſte comme un vigoureux effort de génie.

La méthode même qui y regne, de former des corps, même les plus bizares, par une multiplication locale de lignes diverſement poſées, n'a été developpée qu'à demi par le calcul integral, & la partie du génie qui conſiſte dans cette *poſition*, & dans cette *multiplication locale* a été long-tems rebelle à toutes ſortes de calculs, & n'y a été aſſujetie que depuis deux ou trois années dans le Livre qui traite des *courbes à double courbure*, & qui n'en eſt que plus eſtimable, pour être l'ouvrage d'un * jeune Géometre, à qui on eſt bien aiſe de rendre juſtice. Car l'Hiſtoire de la Géometrie doit être vraye par deux endroits, & parce qu'elle eſt Hiſtoire, & parce

* M. Clairaut.

qu'elle eſt l'Hiſtoire de la Géometrie.

Oüi, le Livre *de Ductu Plani in Planum*, eſt proprement un traité de courbes à double courbure, & ſur-tout de *Corps terminés par des courbes à double courbure*. La hauteur de cette ſpeculation l'avoit renduë peu traitable juſqu'ici. Le premier & preſque le ſeul qui y avoit touché depuis ſon inventeur, étoit le célebre *Laloubere*, qui avoit quarré géometriquement la courbe formée par un tour de compas ſur la ſurface d'un Cylindre. Quadrature qu'on avoit enſuite fort bien renduë par le calcul, qui vient enfin de s'approprier avec beaucoup de dexterité cette theorie épineuſe.

Voilà au vrai les nouvelles méthodes de Géometrie; voilà le nouvel Art avec quoi Gregoire de Saint Vincent, non-ſeulement fraya le chemin aux nouvelles découvértes (c'eſt-à-dire, aux nouveaux calculs) *ad inventa recentiora viam ſtravit*, comme le dit *Wolfius* dans ſon Hiſtoire des Mathématiques, mais fit auſſi lui-même une infinité d'autres grandes découvertes. Car cet eſprit vaſte, fecond & appliqué alloit de découverte en découverte; en avoir fait une, étoit une raiſon pour lui d'en faire une autre.

L'immenſe détail de proprietés dont il enrichit d'abord les Sections coniques, l'éleva peu à peu aux grandes méthodes dont on vient de parler; & ces méthodes générales le ramenerent à un nouveau détail de decouvertes encore plus élevées que les premieres.

*Archimede* avoit le premier quarré la parabole,

mais par un artifice peu naturel, & en un ſens peu Géometrique, plus merveilleux cependant que la quadrature même de la parabole. Les Modernes qui ont remarqué ce detour ou cette eſpece d'écart ſçavant d'Archimede, mais qui auroient dû un peu plus l'admirer, ont en revanche fort admiré leurs calculs pour la facilité avec laquelle ils leur donnoient cette quadrature de la parabole comme d'un trait de plume.

Mais ſans aucun calcul & par le ſimple raiſonnement Géometrique d'Euclide ou d'Apollonius, notre Auteur dans ſon traité de la parabole & même ailleurs, donne vingt & trente manieres differentes de quarrer cette courbe & ſes divers ſegmens extérieurs & interieurs : & pluſieurs de ces quadratures ſont l'affaire d'une ou de deux Propoſitions tout auſſi courtes que le peut-être le procedé du calcul moderne pour arriver au même but.

Une découverte de la plus haute eſpece en ce genre de quadratures, fut la *ſymbolization* de la quadrature de l'hyperbole avec celle du cercle : cette ſeule découverte miſe en calcul, a comblé de gloire les cinq ou ſix Géometres les plus célebres du dernier ſiecle. *Mercator de Holſtein en Dannemarc*, d'après *le Comte Brounker*, illuſtre Anglois, quarra l'hyberbole par une Serie. Auſſi-tôt *M. Barrou* Maître de *M. Newton*, ſe ſouvint que cet illuſtre Diſciple lui avoit fait voir autrefois une pareille quadrature. D'un autre côté *M. Leibnis* trouva la fameuſe *quadrature ſerielle* du cercle, & le non moins célebre *M. Huguens* fut comme enthouſiaſmé du rapport merveilleux

de

de cette quadrature avec celle de l'hyperbole. *Wallis* & divers autres y mirent auſſi la main.

Or, voici comment Gregoire de S. Vincent l'y avoit miſe pluſieurs années avant tous ces Auteurs. On en va juger par la *Scholie*, qui termine ſa théorie Géometrique ſur cette matiere, *pag.* 1210, *t.* 2.

» Nimis elegans viſa eſt mihi ſymbolizatio inter pro-
» prietates circuli & hyperbolæ, quam ut eam ſup-
» preſſam voluerim, aut ſilentio præteritam. Quid-
» quid enim ad circuli quadraturam neceſſarium fuit,
» id omne in Hyperbolæ quadratura ita ad amuſſim
» ſeſe offert, ut *iiſdem prorſus caracteribus*, cademque
» diſcurrendi methodo utramque abſolvere poſſis,
» modo diſponantur debita ratione quæ requiritur
» ad diſcurſum formandum, &c. Neque enim eſt
» alia diverſitas.... quam quòd una parabolarum
» D N. cum hyperbola D P P. *ad aliam partem tranſ-*
» *lata ſit*.... Mirabiliter enim reficere nata eſt uſ-
» que adeo univerſalis ſymbolizatio. »

On voit bien que ce grand homme, loin d'avoir fait au hazard une découverte qui réſultoit d'une très-longue ſuite de Propoſitions raiſonnées & épineuſes, ſentoit toute la hauteur de cette découverte, & qu'il l'admiroit par les mêmes endroits qui enthouſiaſmoient M. Huguens. Il eſt au reſte ſingulier, que l'Auteur remarque que les *mêmes caracteres* & le même raiſonnement ſervent pour les deux quadratures; ce qui joint avec cette autre remarque que l'unique diverſité qui s'y trouve, vient *d'une tranſpoſition de parties* dans l'hyperbole, peut faire penſer à ceux qui n'ont pas lû l'Auteur, & qui ſont prevenus

pour le calcul, que toute cette affaire conſiſte dans un calcul algebrique, compoſé des mêmes lettres pour les deux quadratures, avec la ſeule diverſité des *ſignes plus & moins.*

Il eſt pourtant vrai qu'il n'y a ici aucun calcul, ſi ce n'eſt enveloppé, & comme en puiſſance. Mais cela même montre évidemment que, ſi l'Auteur qui ſçavoit bien l'Algebre, & pour le moins l'Arithmetique, & qui étoit bien au fait des Series, dont il étoit l'inventeur, avoit daigné exprimer cette découverte par le calcul, comme il l'a fait pour quelques autres, il n'auroit pû nous donner pour les deux quadratures que la même expreſſion Analytique compoſée des mêmes chiffres ou lettres *iiſdem prorſus caracteribus*, avec la ſeule diverſité des ſignes qui marquent le tranſport des parties à des côtés oppoſés, *quod ad aliam partem tranſlata ſit.*

L'hyperbole eſt une courbe ſinguliere. Gregoire de S. Vincent en connoiſſoit toute la ſingularité : Auſſi eſt-ce celle à laquelle il paroît s'être le plus attaché. Il a quarré un eſpace infini renfermé entre deux hyperboles concentriques. Les *Logarithmes Hyperboliques*, ſont une découverte que le calcul s'eſt attribuée avec le plus de complaiſance. Elle eſt, ſans aucun mélange de calcul, de *Saraſſa* Diſciple de Gregoire qui en avoit jetté tous les fondemens, de l'aveu de Saraſſa, en épuiſant la matiere des *Quadrilateres & des Secteurs hyperboliques*, dont on connoît d'ailleurs l'importance pour la réſolution des *Problêmes Phyſico-Mathematiques*, de ceux, ſur-tout, qui regardent les chutes des corps, leurs mouvemens di-

verſement accelerés & retardés, les denſités des milieux, leurs reſiſtances, &c. comme on peut le voir dans le ſublime Ouvrage des *Principes Mathematiques de la Philoſophie naturelle*, & dans pluſieurs beaux morceaux des *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris.*

*La ſymbolization de la Spirale d'Archimede avec la Parabole d'Apollonius*, eſt la découverte favorite de notre Auteur, & une de celles que les nouveaux calculs ſe ſont appropriées des premieres, & qui lui ont le plus ouvert la porte à la comparaiſon des courbes. Car avant Grégoire on ne connoiſſoit pas ou preſque pas la *Géometrie comparée*, qui eſt la grande clef des découvertes : & du reſte il n'étoit pas aiſé de deviner que la Spirale qui eſt d'un ordre tranſcendant, ne fût qu'une parabole, qui eſt une courbe du premier ordre, mais repliée & enveloppée, dont l'axe eſt circulaire.

Cependant Gregoire a exactement demontré, que tout ce qu'Archimede avoit découvert de la Spirale convenoit à la parabole ; que tout ce qu'Apollonius avoit dévouvert de la parabole, convenoit à la Spirale ; que mille autres proprietés leur étoient communes. Mais la rectification hypotetique du cercle par la tangente de la Spirale étoit une découverte d'Archimede, que toute l'antiquité avoit admirée, & que les modernes regardent encore comme de la plus haute eſpece. Ils ont regardé comme parallele à cette découverte, celle de la même rectification par la tangente de la parabole : ils ne la connoiſſent la plûpart que ſous l'enve-

loppe du calcul. Elle n'eſt qu'un trait de la ſymbolization des deux courbes en queſtion, & Gregoire ſeul en eſt le premier inventeur. Ce ſont pourtant là des faits précis & Géometriques.

Le plus merveilleux de tout ceci, c'eſt que Gregoire de S. Vincent, modeſte, & non moins exceſſivement admirateur des Anciens, ait mis une Preface exprès à la tête de cette ſymbolization pour prouver qu'Archimede n'avoit pû l'ignorer; & que dans la Préface générale de ſon Ouvrage il en parle ſur le même ton; qu'en divers autres endroits il s'obſtine, juſqu'à fatiguer le Lecteur, de la rapporter à Archimede, quoique les plus habiles Géometres de ce tems-là lui euſſent proteſté, après avoir bien éxaminé la choſe, qu'Archimede n'y avoit pas penſé; que s'il l'avoit ſçû, il n'auroit pas manqué de s'en parer, comme d'une découverte qui ne le cédoit à aucune des ſiennes, mais qu'il n'avoit pas dit un mot qui fût ſoupçonner qu'il en eût la moindre idée.

Qu'on compare ce procedé avec celui de ceux qui ont embelli leurs Ouvrages de ce morceau ſublime, ſans faire aucune mention, ni d'Archimede, ni de Gregoire de S. Vincent; & l'on verra dès ce moment s'accomplir l'Oracle ſacré, que celui qui s'humilie ſera exalté, & que celui qui s'exalte ſera tôt ou tard enfin humilié. Mais ſans humilier perſonne, on ſe contente ici d'éxalter un homme que perſonne n'a eu droit d'humilier, & que les gens d'honneur aimeront ſans doute à dédommager par leur reconnoiſſance, de l'ingratitude de ſon ſiecle ou du ſuivant.

Mais pour la force de l'invention, nulle découverte ne le diſpute à la *cubature des onglets*, & à la *quadrature de leur ſurfaces à double courbure*. Le calcul n'a pas manqué de s'en ſaiſir, & divers Auteurs ont paru ſur les rangs pour en partager la gloire, c'eſt-à-dire, celle d'une ſeconde invention, quoique ſans aucune mention du premier inventeur.

La ſymbolization de l'onglet inſcrit dans un priſme, & circonſcrit à une pyramide, avec la ſphere inſcrite dans un cylindre, & circonſcrite à un cone, eſt un morceau qui va pour le moins de pair, avec la découverte du grand Archimede ſur la comparaiſon des trois derniers corps, dont il voulut qu'on ornât ſon tombeau.

Le cylindre, la ſphere & le cone, ſuivant Archimede ſont dans le rapport des nombres 3, 2, 1. Le priſme, l'onglet, la pyramide ſont, ſuivant Gregoire de S. Vincent dans les mêmes rapports; & tous les autres points de comparaiſon établis par le Géometre de Syracuſe, entre les trois corps reguliers mentionnés, ſont établis par notre Géometre Flamand, entre ces trois corps bizarres & tout-à-fait irreguliers. Car l'onglet eſt une portion de cylindre coupé de biais, & une eſpece de bec de flute, renfermé par trois ſurfaces, deux plates, l'autre courbe; l'une demi circulaire, l'autre demi elliptique, & la troiſiéme bizarement cylindrique.

Or les mêmes ou de pareilles ſymbolizations établies entre ces ſolides, ſe ſoutiennent entre leurs ſurfaces reſpectives, c'eſt-à-dire, entre la théorie de notre Auteur d'un côté, & celles de *Pappus* & *d'Ar-*

*chimede* de l'autre côté. On a voulu en dernier lieu que Deſcartes fût encore le ſeul Auteur qui eût touché aux courbes à double Courbure. Quel interêt a-t-on donc d'attribuer tout à Deſcartes, au préjudice des legitimes poſſeſſeurs? C'eſt qu'en attribuant tout à Deſcartes, on s'attribue tout à ſoi-même, rien n'étant plus facile enſuite que de dépoüiller celui à qui rien de tout cela n'appartient ; au lieu qu'en citant Gregoire, & après lui *Laloubere*, on ſe reculeroit au troiſiéme degré d'invention.

Tous les problêmes au reſte qui avoient arrêté les anciens Géometres, ce grand Géometre, ou les réſolut, ou en porta la réſolution au point où les calculs modernes les laiſſent juſqu'ici : ce qui démontre abſolument qu'il a ébauché, & plus que cela, toutes les nouvelles découvertes Géometriques, & que le calcul n'a gueres fait qu'épuiſer les mines ouvertes par ce génie vraiment inventeur.

Il termina tout d'un coup les grandes diſputes ſur l'*angle de contingence*, en faiſant voir que l'angle du rayon avec la circonference du cercle étoit droit, & le même par conſéquent qu'avec la tangente, confonduë à la naiſſance avec cette circonference, & cela dans un petit, comme dans un grand cercle.

Les plus anciens Géometres, fort reſſerrés dans leur théorie, & bornés à la connoiſſance des deux eſpeces de lignes les plus ſimples que nous ayons, la droite & la courbe circulaire, avoient érigé leur imperfection même en principe, & poſé une borne que l'antiquité toute entiere juſqu'à Deſcartes & à

Gregoire n'avoit pû franchir. C'étoit de ne regarder comme Géometriques que les problêmes qui ſe conſtruiſoient par la regle & par le compas, c'eſt-à-dire, par la ligne droite & par le cercle. Deſcartes comprit & décida qu'on pouvoit franchir cette borne, & Gregoire de S. Vincent la franchit cent & deux cent fois.

En particulier la *duplication du cube*, connuë ſous le nom de *Meſolable*, ou de *deux moyennes proportionelles*, problême propoſé par l'*Oracle* même de *Delphes*, pour embaraſſer les Géometres, & pour la deſtruction du genre humain, étoit regardée comme un *problême inſoluble*, parce qu'il étoit inſoluble par la regle & le compas. Gregoire le réſolut ſans façon, & de vingt & trente manieres differentes, par la conſtruction de deux ſections coniques, il en fit autant de la *triſection de l'angle*, qui étoit auſſi dans l'antiquité un problême inſoluble. La Serie que cet Auteur aſſigna dans ſon Traité des Progreſſions infinies, Prop. 107, *cor. pag.* 112, pour cette triſection, eſt d'un artifice admirable & a été bien remaniée par le calcul.

Il a encore plus remanié la réſolution du fameux *Problême de Zenon*, qui avoit tenu en échec non-ſeulement toute la Géometrie, mais la Philoſophie même des Anciens. Par ſa difficulté ce problême alloit de pair avec le célebre *nœud gordien*, & on lui avoit donné le nom d'*Achille*. On avoit même fait entrer Achille dans ſon expreſſion pour marquer qu'il étoit inſurmontable ou irreſoluble, comme ce grand Capitaine étoit invincible. Ce fut Gregoire

ſeul qui le premier vainquit cet *Achille de Zenon*, en réſolvant le problême, à la *pag.* 201, *Schol.* de la *Prop.* 87, *du Traité* cité des *Progreſſions Géometriques.* On a bien vanté cette réſolution, au profit d'abord du calcul, mais deſormais à celui de notre Auteur.

Nous ne finirions pas ſi nous voulions detailler toutes les richeſſes d'un Auteur plus connu que célebre, & en qui tout ſemble paradoxe : Car on peut dire, qu'il n'a jamais été plus célebre que lorſqu'il a été le moins connu, ni jamais plus connu que lorſqu'il a été le moins célebre. De ſon vivant les critiques qu'on en fit le rendirent très-célebre : à meſure qu'on le connut mieux, on ceſſa de le critiquer, on en profita, chacun s'en appropria ce qu'il trouva le plus à ſa bienſéance ; & comme ſi on s'étoit donné le mot, on ceſſa de le citer & on ne chercha, en quelque ſorte, qu'à l'enſevelir dans l'oubli ; & le nom de Deſcartes, à qui les François eurent la reconnoiſſance de rendre enfin juſtice, ſembla faire diſparoître tous les autres noms, au moins pour un tems. Le malheur de Gregoire de S. Vincent, ſi c'en eſt un, fut qu'il ſe trouva ne tenir, ni à une nation, ni à un corps, ni à une ſecte fort jalouſe d'une pareille gloire.

Il étoit difficile cependant que parmi tant de bouches ouvertes pour élever la Géometrie moderne juſqu'aux nuës, il ne s'en trouvât de ſinceres, & qui rendiſſent témoignage en partie à la verité. Outre *Viviani*, *Saraſſa*, *Wolfius*, & bien d'autres, le témoignage de *M. Leibnis* eſt en cette matiere déciſif, &

tout-

tout-à-fait digne de ſa candeur & de ſa probité.

En 1686, au mois de Juin, ce célebre Auteur rendant compte, dans les *Actes de Leipſic*, des progrès de la Géometrie & de la découverte des nouvelles méthodes, auſquelles il avoit lui-même tant de part, parle d'abord de la *méthode des indiviſibles de Cavallieri*, qu'il daigne à peine mettre au rang des vûës Géometriques, qui ont donné naiſſance à la nouvelle Géometrie de l'Infini, *ſed Geometria indiviſibilium Cavallieriana ſcientiæ renaſcentis non niſi infantia fuit.* Arrêtons-nous un moment à ce temoignage.

Il eſt fort ſingulier que M. Leibnis, Juge fort éclairé & fort déſintereſſé entre Cavallieri & Gregoire de S. Vincent, traite la méthode de Cavallieri d'enfance, par rapport à la nouvelle Géometrie; tandis que d'un autre côté la plûpart des nouveaux calculateurs ne ceſſent de rapporter toute cette Géometrie, & tous leurs nouveaux calculs, à l'époque préciſe des indiviſibles de Cavallieri. Pluſieurs le diſent comme ils le penſent; mais on peut prouver & demontrer par de bons faits & de bons témoignages que les premiers Auters de ce langage l'ont affecté pour des raiſons qu'on diroit bien s'il le falloit. On ſe contentera de celle qu'on a déja indiquée, qui eſt qu'on a mieux aimé attribuer tout à Cavallieri qui n'y prétendoit preſque rien, qu'à celui qui pouvoit y tout prétendre : On aimeroit bien mieux confier à un enfant qu'à un homme fait, le dépôt dont on voudroit s'emparer ſous-main ſoi-même. Nous retoucherons bien-tôt cet article des indiviſibles.

Aptès avoir traité ces indiviſibles d'enfance de la nouvelle Géometrie, M. Leibnis continuë ſon Hiſtoire abregée, & dit que trois hommes célebres ont apporté de plus grands ſecours, *majora ſubſidia attulerunt triumviri celebres.* Ces trois hommes ſont, *M. de Fermat*, François, Conſeiller au Parlement de Toulouſe, par ſa belle méthode des plus grands & des moindres, *Fermatius inventâ methodo de maximis & minimis*; Deſcartes, François auſſi, par ſon application de l'Analyſe Algebrique aux lignes de la Géometrie ordinaire, *Carteſius oſtenſâ ratione lineas Geometriæ communis .... exprimendi per æquationes*; & Gregoire de S. Vincent, Flamand, par pluſieurs belles découvertes, *& Gregorius à S. Vincentio multis præclaris inventis:* A ces trois hommes célebres, M. Leibnis ajoute *Guldin*, dont la découverte eſt en effet originale, & ſe rapporte de très-près aux nouvelles méthodes, *quibus egregiam Guldini regulam de motu centri gravitatis addo.*

On doit remarquer que M. Leibnis en attribuant une découverte à chacun des autres, en donna pluſieurs à Gregoire ſeul. M. Leibnis n'étoit pas auſſi enthouſiaſmé de Deſcartes que ſes Panegyriſtes ordinaires, & ne regardoit pas même le calcul comme une ſi belle choſe, n'ayant pas même d'abord regardé ſon calcul differentiel & integral, comme il le regarda lorſqu'il en vit quelques autres dans l'extaſe & dans l'admiration.

Mais c'eſt ſur-tout dans les critiques qu'on fit de notre Auteur, que nous devons retrouver le vrai fonds des éloges qu'il a mérités. Car les Auteurs ſe

plaignent des critiques, & abſolument ils ont droit de s'en plaindre, parce qu'elles ſont ordinairement pleines de malice & de fiel, ſans preſqu'aucun mélange d'inſtruction & d'utilité ſolide : mais il eſt pourtant vrai que c'eſt le plus grand triomphe des grands hommes. Ce qui eſt ſi vrai que dans ces derniers tems où le rafinement de la critique maligne eſt monté parmi les gens de lettres à ſon plus haut point, on a vû des cabales entieres ſe liguer, même par ſerment, pour ne laiſſer échapper aucun mot de critique, au moins publique, contre les Auteurs & les Ouvrages, auſquels elles en vouloient le plus; & l'on va voir en effet, que la gloire de S. Vincent, comme anéantie par le ſilence affecté de ceux qui ont approuvé ſa doctrine en la copiant, ſe trouve toute pure & brillante dans les monumens que l'envie & l'ignorance n'avoient conſacrés qu'à l'anéantiſſement effectif de cette même gloire, en rejettant ſa doctrine.

Il faut l'avoüer cependant : il étoit réellement trop grand homme, & ſon Ouvrage trop plein & trop nouveau, étoit trop au-deſſus de la portée de ſon ſiecle, pour n'être pas méconnu par ſes contemporains. La Géometrie devroit-elle être ſujette à des chicanes? Ce fut alors qu'elle commença de l'être, parce qu'elle commença à être une ſcience de calcul. Car tout eſt lié, & la chicane l'a toujours été, même en Géometrie, avec le calcul. N'en faiſons point un crime à Deſcartes, il fut à plaindre lui-même, d'avoir été pendant toute ſa vie la premiere victime de cet eſprit de calcul qu'il venoit de repandre.

Quoiqu'il en ſoit, Gregoire de S. Vincent fut encore plus vivement attaqué, au moins ſur la Géometrie par *Meibon Sylvius*, *Lipſtrop*, *Merſenne*, *AA* ××× *. Ce n'étoient pas-là ſes plus dangereux adverſaires, quoique les plus acharnés & les plus importuns : mais *le P. Leotaud Jéſuite*, *le célebre M. Huguens*, *& le grand Deſcartes* lui-même, donnerent beaucoup de célebrité à la diſpute, dont *Aynſcom* preſque ſeul avec *Saraſſa*, ſoutint tout le poids ſous les yeux de leur Maître, qui ne daigna pas s'y préter ouvertement.

Meibom n'étoit qu'un Grammairien en Géometrie, non plus que dans le reſte de la litterature. Il attaquoit imprudemment tous les Anciens, ſans en excepter Euclide. Plus Gregoire avoit multiplié les découvertes, plus Meibom crut qu'il avoit amplifié les erreurs anciennes. *Hunc verò errorem ampliavit Gregorius à S. Vincentio.* Ce que nous recuëillons de mieux de Meibom, c'eſt qu'il nous apprend, ſans doute, contre ſon intention, le grand éclat des découvertes de ſon adverſaire, & le grand aſcendant qu'elles avoient pris, peu après leur publication ſur tous les eſprits : *Hujus autem*, dit-il, *errores quòd planè inſignes ſint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi.* On comprend bien que ce que Meibom qualifie d'*errores*, ne doit être traduit que par le nom de *découvertes*, de *nouveautés ſublimes*, ce qui eſt prouvé, 1°. par le fait même, 2°. *quod totum orbem irretitum teneant.* C'étoit-là un fait hiſtorique dont Meibom étoit bon témoin, & que ſa critique même

* C'eſt par ces deux lettres *AA.* que Gregoire & Aynſcom déſignent M. de Roberval.

conſtate aſſez ; cet homme-là n'ayant attaqué Gregoire, que parce que tout l'Univers l'admiroit & pour ſe donner un illuſtre adverſaire.

Ce n'étoit-là qu'un déclamateur, M. de AA ××× étoit un ſçavant de conſéquence, qui ne manquoit pas de titres, que *le P. Merſenne* annonça à Gregoire, comme un Géometre célebre dans tout l'Univers, *noto toto orbi Geometrâ*, qui étoit comme à la tête de la coterie du tems, qui avoit déja fait le coup de piſtolet avec Deſcartes, que de nos jours on a comme aſſocié à Cavallieri pour la découverte du principe des indiviſibles, & qui enfin avoit toujours le P. Merſenne comme à ſes ordres pour porter à tous les grands hommes qui vivoient alors, des eſpeces de cartels de défi, qui ne furent pourtant pas toujours ſi bien reçûs que chez Grégoire de S. Vincent : car c'étoit un bon homme, ſimple, modeſte, qui ne rebutoit perſonne.

Mais ſi le cartel de M. de A A ××× fut ici bien reçû, il étoit mal adreſſé : & ſi Gregoire étoit bon homme, il étoit impitoyablement Géometre, & il n'étoit pas ſûr de broncher devant lui. L'Ouvrage qu'on attaquoit étoit à l'épreuve, & Aynſcom défendoit ſon Maître avec aſſez de chaleur, & d'un ton ferme, trenchant, joli même & aſſez finement ironique, comme il convient avec des adverſaires trop acharnés.

Le Livre des Proportionalités, comme le plus élementaire, fut preſque le ſeul que A A ××× cenſura ; car ſa critique porta le nom de *Cenſure*. Il y traita ſon adverſaire de haut en bas, ſelon le ſtile

de ces Meſſieurs, & ſon Livre, d'inutile, de ſuranné, d'etroné cependant, & comme contenant 100 Propoſitions fauſſes ſur 172. Meibom qui n'avoit non plus touché qu'à ce Livre, y comptoit 130 Propoſitions erronées.

Ils critiquerent les uns & les autres, les expoſans commenſurables des grandeurs incommenſurables, les expoſans finis des grandeurs infinies. Croira-t-on que ce Géometre connu de l'Univers alla juſqu'à prétendre, & à ſoutenir que le rapport d'égalité avoit pour expoſant, non l'unité, mais zeto ? Quelques demi-idées échappées de la doctrine de l'Auteur ſur les quadrilateres hyperboliques achevoient d'égaret Merſenne & A A ×××: Cat voici comme ils raiſonnoient. Les quadrilateres en queſtion, ſont les expoſans du rapport des abſciſſes, & reciproquement des ordonnées : n'y ayant donc aucun quadrilatere renfermé entre deux ordonnées égales, &c. *Cum inter duas lineas æquales ſeu potius unicam, nullum ſpatium includatur hyperbolicum, patet rationem æqualitatis nullam habere quantitatem.* Ces Meſſieurs avoient bien lû Gregoire pour le critiquer, mais jamais pour l'entendre.

Une choſe les revoltoit tous étrangement : c'étoit que l'Auteur exprimât & calculât les rapports comme les fractions, *tot errorum*, diſoit M. A A ×××, *unica eſt cauſa, quod Gregorius à S. Vincentio rationes conſideraverit ut fractiones.* Et le P. Merſenne ſon collegue en critique : comment l'autoient-ils redreſſé ſur l'article ? lui qui faiſoit de ſçavans Volumes d'*Harmonie* dans le faux principe des Muſiciens Géometres, qui

pour ajouter la quarte à la quinte, enſeignoient qu'il falloit ajouter leurs rapports, 2, 3, & 3, 4, & qui pour ajouter ces rapports enſeignoient auſſi qu'il falloit les multiplier, corrigeant pourtant par cette ſeconde erreur le vice de la premiere.

Ces chicanes cependant, en conſtatant les propres découvertes de l'Auteur, alloient auſſi au profit de la ſcience, de la part des habiles Géometres, qui en étoient l'objet. Ce furent les critiques de Merſenne en particulier qui nous valurent la belle découverte de Saraſſa : Ces Meſſieurs la firent tout-à-fait éclore à force d'en tourmenter les ſémences. Il y a des plantes ſalutaires qui ne naiſſent qu'à la lueur des éclairs & au bruit des tonneres.

Merſenne au fond n'étoit pas malin : il étoit même ſçavant & ſçavant de bonne foi ; choſe rare alors & depuis ce tems-là, au moins dans la Géometrie. Mais Merſenne avoit la fantaiſie de faire un perſonnage, & de ſe jetter entre les ſçavans les plus diſtingués, ſous le nom de Conciliateur ; ce qui finiſſoit ordinairement par une broüillerie irreconciliable, comme entre Deſcartes & Paſcal. Il falloit ſurtout que Merſenne dît ſon avis ſur tout ce qui paroiſſoit dans la litterature. Il avoit pourtant la modeſtie & la diſcretion d'en parler le plus ſouvent au nom d'autrui, & en termes généraux pour ne pas trop s'engager.

Enfin il ſe plaignit que pour donner la quadrature du cercle, Gregoire avoit trompé l'attente des Géometres en ſe frayant des routes extraordinaires. *At vero cum neque quadraturam dederit eo modo quo ſolet*

*à Geometris expectari :* Qu'il s'étoit même jetté dans des ſpeculations plus épineuſes que la quadrature même, *cum in eâ exhibendâ longè quam ipſam quadraturam difficiliora ſupponat vel poſtulet.* Remarquons pourtant que tout le Livre de Gregoire eſt par Propoſitions, rigoureuſement démontrées comme Euclide, ſans demandes ni ſuppoſitions.

Merſenne continuë à dire, apparemment ſans commiſſion, que cet Ouvrage a déplu aux Géometres François, *noſtris Geometricis diſplicuit*, parce qu'il avoit le titre faſtueux de quadrature du cercle, *quòd cum opus ſuum quadraturæ circuli ſpecioſo ſuperboque titulo inſignierit.* Ce titre eſt pourtant tel, *de quadraturâ circuli opus Geometricum :* Ouvrage géometrique, *touchant* ou *ſur la quadrature du cercle.* M. Newton a bien donné depuis un Ouvrage avec ce titre de *Quadraturâ curvarum.* Nulle part peut-être Gregoire n'a dit qu'il eût trouvé la quadrature : & tel qui écriroit contr'elle pourroit bien encore prendre le même titre.

Mais il y a bien de l'injuſtice & de la plus baſſe malignité dans ce que Merſenne ajoute, ſur la foi ſans doute de A A ××× & de P ×××: *Nihil tamen quod ad rem faciat præter id quod in ea re hactenus inventum, protulerit.* Merſenne & A A ××× & P. auroient été bien déconcertés s'ils avoient pû prévoir le grand ſuccès & le grand air de nouveauté ſublime que tout cela alloit prendre à l'aide du *Calcul Carteſien*, dont ils étoient auſſi ennemis que de cette *Géometrie Gregorienne.*

Merſenne termine ſa cenſure, en diſant que cette

cette Géometrie ſe reduit à ce problême non reſolu & plus élevé que la quadrature, ſçavoir, trois grandeurs étant données & les logarithmes de deux étant donnés, de trouver le logarithme de la troiſiéme. *Quippè in illud abit necdum ſolutum problema, quodque forſan longè difficiliorem quàm ipſa quadratura ſolutionem requirit, datis tribus magnitudinibus, &c. datiſque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum Geometricè invenire.*

Or ce fut préciſement ce problême plus difficile que la quadrature du cercle, dont Saraſſa donna tout de ſuite la réſolution après avoir montré cependant qu'il étoit mal & peu géometriquement propoſé, & dans quel ſens il pouvoit être réſolu : & ce fut cette réſolution qui nous valut la pleine découverte des logarithmes hyperboliques, dont voilà l'Hiſtoire.

De tels critiques, comme l'on voit, n'étoient pas trop propres à perſuader à des Géometres de cette ſuperiorité que la quadrature cherchée ne fût pas entre leurs mains. Deſcartes qui connoiſſoit les perſonages & qui n'étoit pas ſi bon homme ni ſi endurant, en écrivit en ces termes de Stockolm à un ami qui lui avoit apparemment rendu compte de cette diſpute.

» Je ſuis à préſent dans un païs ſi éloigné, que » je ne puis pas même eſperer d'y voir les écrits » dont vous me parlez ; car, outre qu'il ſeroit dif- » ficile de les apporter ici, je n'y aurois pas auſſi » beaucoup de loiſir pour les examiner. C'eſt pour- » quoi ſi vous écrivez au R. P. *Gregorius à S. Vincen-*

» *tio* ; je vous prie de l'aſſurer de mon très-humble » ſervice, & de lui faire ſçavoir de ma part que, » bien que je n'approuve pas ſa quadrature du cer- » cle, je ne crois pas néanmoins que *le ſieur Ægide* » *Roberval* ait aſſez d'eſprit pour la refuter, & ainſi » que pendant qu'il n'aura point d'adverſaires plus » forts que cettui-là, il ne lui ſera pas mal-aiſé de » ſe défendre.

Aynſcom ne rapporte cette Lettre de Deſcartes à la page 108 de ſon *Expoſitio ac deductio Geometrica*, imprimée à Anvers, que pour contrebalancer le *noto toto orbi Geometra* de Merſenne, & ſon *noſtris Geometricis diſplicuit*, en faiſant voir que Deſcartes, quoique François, *homo gallus*, & habile Algebriſte, *Algebriſta egregius*, penſoit bien differemment de Merſenne, ſur le compte du ſieur AA***, ou *Ægide Roberval*, qui eſt le mot de l'Enigme.

Car du reſte, Gregoire, Saraſſa, Aynſcom & toute cette école Flamande renouvellée de celle de Syracuſe, faiſoit peu de fonds ſur le ſuffrage de Deſcartes, qu'ils qualifioient volontiers de *Algebriſta egregius*, mais qu'ils auroient peut-être eû peine à traiter de Géometre ordinaire ; tant les idées des hommes ſont differentes, tant auſſi on a excedé dans les panegyriques qu'on a faits de ce grand homme, qui n'a pourtant de grandeur en Géometrie, que celle qui lui revient de l'application qu'il a faite de ſon Algebre à cette ſcience ; en quoi, pour le dire franchement, il a rendu un plus grand ſervice à l'Algebre qu'à la Géometrie. Nous verrons bientôt la petite guerre qui reſulta de-là entre les deux

écoles, celle de Gregoire & celle de Deſcartes, c'eſt-à-dire, celle d'Archimede & celle de Diophante.

Il nous reſte un article important à diſcuter dans la cenſure de Merſenne & de A A*** : il y avoit de l'animoſité dans leur fait. Aynſcom à la page 28, rapporte une Lettre de Gregoire aux deux Cenſeurs, dans laquelle on voit éclater une nobleſſe de ſentimens, une liberté de penſées, une modeſtie, un ménagement, une charité d'expreſſions qui devoient lui gagner le cœur & l'eſtime de ſes critiques. Point, tout les encourageoit à oſer de plus en plus, & le merite ſuperieur d'un tel adverſaire, interdiſant tout eſpoir d'égalité, ne laiſſoit à des rivaux jaloux que l'amertume dans le cœur, l'erreur dans l'eſprit, & le fiel dans le ſtile.

A force de ronger ils entrevirent dans l'ouvrage ſur lequel ils s'acharnoient, un air de methode d'indiviſibles : ce n'étoit point elle, c'étoit la méthode d'exhauſtion d'Archimede, mais auſſi-tôt, ſans prendre garde que l'auteur l'attribuoit pleinement à Archimede, Merſenne prit la plume pour accuſer de Plagiariſme l'homme du monde le moins digne d'un pareil reproche. *Neque meminerit*, dit-il, *ullatenus Geometriæ per indiviſibilia eruditiſſimi Bonaventuræ Cavallerii*, *&c.* On aime à voir ces Meſſieurs prodiguer les éloges à Cavallerius qui en merite en effet de très-grands, mais pas un ſeul au préjudice de Gregoire, pour qui il n'en échappe pas ſeulement un mot aux deux célebres diſtributeurs du mérite Géometrique. On ſçait de quoi cette cabale étoit capable, & la ſeule édition du prétendu manuſcrit

d'*Ariſtarque de Samos*, pour enlever d'un ſeul coup à Deſcartes ſon ſyſtême géneral de Phyſique, montre leur ſçavoir-faire en ce genre.

Comme cependant toutes ces chicanes n'ont pas laiſſé de jetter un voile ſur l'Hiſtoire litteraire, Gregoire de S. Vincent n'ayant eû ni ſecte ni cabale depuis près d'un ſiecle pour faire valoir ſes droits, & que l'on a pris le train d'enter la nouvelle Géometrie ſur les indiviſibles malgré l'évidence du fait contraire, malgré la proteſtation de M. Leibnis, malgré le tort que cela faiſoit à la Géometrie, ſoit en l'expoſant à mille fauſſes lueurs, ſoit en lui ôtant ſa certitude & ſon évidence, ſoit en la décriant auprès des eſprits foibles, comme Philoſophique & conjecturale, il faut une bonne fois diſcuter un point que toutes ces chicanes, ces mépriſes, ces manques de bonne foi ont couvert des plus épaiſſes ténebres, & rendu infiniment difficile à éclaircir.

La difficulté en eſt telle que les plus honnêtes gens & les plus clairvoyans s'y ſont mépris, & ont aidé à l'impoſture en s'y laiſſant prendre, & que M. de A A *** même le plus grand ennemi des nouvelles methodes naiſſantes qu'il y ait eu, a trouvé le ſecret de ſe faire citer en dernier lieu * comme un de ceux qui y avoit le plus contribué, en mettant la main à la découverte des indiviſibles. Mais cette prétention eſt ſi frivole que Merſenne même l'a ignorée. Car s'il en avoit eu la moindre idée, le moindre ſoupçon, il étoit trop ſenſible à l'amitié & trop curieux d'enfler ſon rôle d'Editeur d'Anectotes litteraires, & de Cenſeur de nouveaux Ouvrages,

* Elemens de la Géometrie de l'Infini, *Pref.*

pour paſſer ceci ſous ſilence. Sans doute que AA*** ne ſe coëffa de cette chimere qu'aprés la mort de Merſenne.

Quoiqu'il en ſoit, celui-ci crut retrouver la méthode des indiviſibles dans l'ouvrage géometrique de la quadrature du cercle, & il intenta à l'Auteur l'accuſation de Plagiariſme ; comme ſi, quand le fait ſeroit vrai, il ne ſuffiſoit pas que parmi les découvertes que Gregoire s'attribuoit, ou qu'on lui attribuoit, il ne fût jamais parlé de celle de Cavallerius. Or jamais cet Auteur, ni ſes Diſciples, ni perſonne, hors Merſenne, n'a dit que la méthode des indiviſibles ſe retrouvât dans l'ouvrage en queſtion. Ils ne l'ont pas dit, & ils n'ont pû le dire, parce que cette méthode n'y eſt pas, & s'il faut le dire, n'étoit pas digne d'y être.

Cette méthode étoit une vraie enfance & un bégayement, ſi l'on veut, de la ſcience renaiſſante, ſelon M. Leibnis. L'enfance eſt ordinairement naïve, ingenieuſe, mais peu exacte & peu développée, la Géometrie de Cavallieri a tous ces traits. Elle eſt ingenieuſe ſans difficulté, mais ſi embroüillée, ſi emmaillottée en quelque ſorte, ſi peu géometrique, ſi philoſophique, que jamais la Géometrie ne l'auroit adoptée, ſi on n'avoit trouvé ailleurs de quoi la corriger & l'éclaircir : *illa falſa*, dit Ainſcom, *niſi alio reducatur ; ut à pluribus oſtenſum eſt.*

Une preuve évidente que la méthode de Gregoire eſt fort differente de celle de Cavallerius, c'eſt que tous les Géometres ayant rejetté celle-là, celle de Gregoire a tout d'un coup paſſé ſans que perſonne

ait même incidenté ni reconnu le moindre rapport des deux méthodes, ſi ce n'eſt Merſenne, qui voyant le ſuccès de cette derniere, s'eſt aviſé de la vouloir confondre avec l'autre pour l'attribuer à celui des deux Auteurs qui piquoit le moins ſon émulation.

Une nouvelle preuve, & en même tems une choſe tout-à-fait de conſéquence à ſçavoir, & qu'on eſt bien fâché d'avoir apperçuë ſi tard : c'eſt que les nouvelles méthodes en ſont là encore, que toutes les fois que l'on les preſente dans le point de vûë de Gregoire de S. Vincent & d'Archimede, elles ne trouvent aucune contradiction, & que c'eſt par-là qu'elles entraînent dans leurs concluſions les plus habiles Géometres; au lieu que dès qu'on fait luire, comme on ne le fait que trop, le côté Philoſophique des indiviſibles, auſſi-tôt tout le public & pluſieurs Géometres ſe révoltent, & crient au Paradoxe ! à la contradiction ! à l'erreur !

Ainſcom caracteriſe aſſez bien les deux méthodes. *Illa*, dit-il, *additione infinitorum indiviſibilium, ut ſic, procedit : hæc ductum rectangulorum in invicem verè geometricum ſeu multiplicationem continet.* Voilà la difference, la même qu'entre l'addition & la multiplication, *l'addition numerique & la multiplication géometrique*, qu'entre un Arithméticien & un Géometre : ce qui démontre de plus en plus la juſteſſe du jugement de M. Leibnis, l'Arithmetique n'étant que l'enfance de la Géometrie, & l'addition une eſpece d'enfance par rapport même à la ſimple multiplication, comme la ſouſtraction par rapport à la diviſion.

*Illa*, continuë Ainſcom, *ab una ſpecie quantitatis ad*

*aliam nec geometricè nec demonſtrativè procedit, hæc geometricâ vereque archimedæâ perficitur exhauſtione.* Après tout les deux méthodes ſont la méthode d'Archimede, l'une manquée, & l'autre élevée plus haut. Cavallerius a voulu prendre cette méthode d'Archimede, mais la Géometrie lui a manqué plutôt que le génie, car il paroît en avoir eu beaucoup : mais il n'a ſaiſi la choſe que par un petit coin ; elle lui a comme échappé en la ſaiſiſſant : au lieu que Gregoire a comme empoigné, comme embraſſé l'ancien ſiſtême dans toute ſa plenitude, avec cette force de génie & cette capacité géometrique qui l'égale à Archimede, lors même qu'il en emprunte quelque choſe.

Auſſi doit-on bien remarquer que la méthode de Cavallieri n'a été entre ſes mains qu'une petite méthode, une méthode de doctrine plutôt que d'invention. C'étoit comme un petit filet d'eau détourné, ſuffiſant à peine pour la culture du petit nombre de découvertes que l'antiquité avoit miſes au jour. Tout ce qu'a pû faire ſon Auteur par ſon moyen, a été de remanier par cette maniere, par cette façon les anciennes découvertes ; & en paſſant on remarquera que tous ceux qui s'en ſont tenus à la premiere idée des indiviſibles, n'ont jamais pû s'élever plus haut qu'à la ſeconde ou troiſiéme façon des vérités déja découvertes par d'autres : au lieu que la méthode d'Archimede, élevée par celle de Gregoire, a paru un grand fleuve, plein & abondant qui du premier pas a rempli deux *in-folio* pour le moins de vérités toutes neuves & de l'ordre le plus élevé.

Tout cela revient toujours au témoignage de

M. Leibnis, l'enfance n'étant en aucun genre l'âge de rien enfanter, & ne pouvant jamais, quelque nourriture qu'elle prenne, s'élever au-deſſus de ſa propre ſubſtance. Mais à ce témoignage clair & bien prononcé de M. Leibnis, nous ajoûterons le procedé précis & géometrique de M. Nevvton. Il faut croire que les deux Auteurs prochains & immédiats de la nouvelle géometrie, auront connu la vraye baſe ſur laquelle elle s'eſt élevée, la vraye ſource d'où elle a découlé.

C'eſt cette baſe, c'eſt cette ſource que ce celebre Geometre Anglois établit & conſtate lui-même en 11. lemmes generaux, dès la premiere ſection de ſon premier livre des Principes Mathematiques de la Philoſophie naturelle, où, ſans preſqu'aucun calcul, il ſe ſert conſtament de la nouvelle Geometrie pour la découverte & la démonſtration de la belle & profonde ſcience Phyſico-Mathematique dont il eſt comme le Createur.

Il donne ces lemmes ſous le titre de Methode des premieres & dernieres raiſons propres à démontrer toute la ſuite de ſon Ouvrage, *de methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.* Comme cette ſection eſt toute parallele à ce que Gregoire appelle la troiſiéme partie des *ductus*, on remarquera ce titre, *tertia pars univerſales quaſdam continet Propoſitiones, reliquis planè fundamentales, quibus corpora ex ductibus orta inter ſe comparantur.* On va voir le grand rapport de ces deux titres, & qu'ils annoncent le même deſſein, & le même but Géometriquement immédiat: Car Nevvton va enſuite

plus

plus loin, à un but Phyſico-Mathematique, qui eſt ſon unique but dans ce bel ouvrage.

Gregoire termine cette troiſiéme Partie par une Scholie où il dit que ſon principe ou ſa théorie eſt très-univerſelle, & que pour éviter les répetitions & l'ennui, il a voulu y renfermer en peu de mots toute l'affaire de l'exhauſtion. *Theorema jam demonſtratum univerſaliſſimum eſt ... ne igitur idem diſcurſus in ſingulis propoſitionibus labore inutili, & cum moleſtiâ lectoris repetendus eſſet, placuit totum exhauſtionis negotium, &c.*

M. Nevvton termine de même la ſection lemmatique par une ſcholie, où il dit qu'il a mieux aimé donner ces lemmes pour éviter l'ennui des démonſtrations *ad abſurdum* des Anciens : *Præmiſi verò hæc lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum.* Or quelles ſont les démonſtrations que les Anciens réduiſoient à l'abſurde, ſi ce n'eſt celles qui regardent l'affaire de l'exhauſtion? Le but préſent des deux Auteurs, eſt donc d'ériger en théorie directe & générale l'exhauſtion ancienne, & ils ſont parfaitement paralleles dans leur titre initial, & dans leur ſcholie finale. Il s'agit ſur-tout de la théorie mitoyenne.

M. Nevvton déclare lui-même que la méthode qu'il a fait regner n'eſt point celle des indiviſibles ; parce que cette méthode eſt trop dure & une pure hypotheſe philoſophique, *durior eſt indiviſibilium hypotheſis*, & qu'elle n'eſt pas aſſez Géometrique, *& propterea methodus illa minus Geometrica cenſetur :* ce qui l'a obligé de recourir aux premieres & aux dernieres

raiſons des quantités naiſſantes & évanoüiſſantes : *malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas evaneſcentium ſummas & rationes, &c.* Il n'eſt donc plus queſtion que de voir ce qu'il entend par ces premieres & dernieres ſommes & raiſons.

La méthode d'Archimede étoit une inſcription & une circonſcription de Poligones à l'infini, qui ſe confondoient enfin en derniere raiſon avec la courbe. La méthode de Gregoire procede auſſi par les Poligones inſcrits & circonſcrits, mais par les derniers qui ſe confondent avec la courbe : & M. Nevvton ne parle non plus dans ſes lemmes que d'inſcriptions & de circonſcriptions indefinies de Polygones confondus, *ultimò*, *in ultimâ ratione* avec la courbe. Eſt-il queſtion de rien de pareil dans la méthode de Cavallieri ?

Mais les Poligones du Géometre de Syracuſe ſont des Poligones ordinaires, inſcrits par leurs angles & circonſcrits par leurs côtés, des Poligones concaves en dedans, convexes en dehors, ou dont tous les angles ſont ſaillans. Difference eſſentielle par où la méthode Flamande s'éleve au-deſſus de la Sicilienne, ou de la Grecque qui lui ſert de baſe. Les Poligones de Gregoire, tant les inſcrits que les circonſcrits, ont leurs angles alternativement ſaillans & rentrans en forme d'échelons ou de marches d'eſcalier. Trouve-t-on rien de pareil dans la méthode Italienne des indiviſibles ? Mais on le trouve & préciſément le même dans la méthode Angloiſe, & en géneral dans toute la méthode, moderne, Françoiſe, Allemande, Européenne en un mot.

L'œil même ne peut s'y méprendre. Qu'on enviſage les figures des lemmes Nevvtoniens, ſur-tout des quatre ou cinq premiers, on les verra préciſément les mêmes que celles de la troiſiéme partie du *Ductus* Gregorien. Or les Propoſitions ſont les mêmes, les concluſions les mêmes, le raiſonnement le même : Les figures inſcrites & circonſcrites differant entr'elles par une ſomme de pluſieurs petits rectangles dans l'une & l'autre méthode, & les deux Auteurs s'attachant également à prouver que cette ſomme eſt égale à un rectangle qui a été fait, dans la conſtruction, moindre qu'une grandeur donnée, *dato minus*, dit l'un & l'autre Auteur.

Et de-là l'un & l'autre, multipliant les petits rectangles à l'infini, concluënt que le rectangle qui leur eſt égal, & qui eſt l'excès de la figure circonſcrite ſur l'inſcrite, eſt infiniment petit, nul, ou *minus quam datum quodvis*, dit Nevvton, ou *minus quocumque dato*, dit Gregoire. Et de là encore ils concluënt enfin que les trois figures, l'inſcrite, la circonſcrite & la courbe mitoyenne ſont égales, dit le Géometre Flamand, *in ratione ultimæ æqualitatis*, dit le Géometre Anglois, ou *ultimo æquales*.

Remarquons au reſte, que quiconque liroit M. Nevvton d'un œil diſtrait, ou ignorant, ou malin, & le verroit tranché par tout de rectangles infiniment minces qui rempliſſent les figures inſcrites & les circonſcrites, s'imagineroit facilement qu'il ſuit la méthode des indiviſibles, tandis qu'il nous avertit lui-même qu'il ne la ſuit pas à cauſe de ſon caractere dur, hypothetique & peu géometrique. Mer-

ſenne n'a point eu d'autre raiſon pour croire que Gregoire avoit ſuivi cette méthode. C'eſt ainſi que nous avons vû qu'on avoit crû le Livre des Principes de M. Newton tout plein de calcul. Qu'il y a peu de Lecteurs qui liſent dans un Livre ce qu'ils y liſent en effet ! & qu'en Géometrie, ſur-tout, il eſt rare qu'on ait les idées préciſes de ce qu'on croit ſçavoir le mieux, & dont on ſe mêle ſouvent de décider même en Auteur dogmatique!

Une remarque plus importante & plus inſtructive que celle-là, c'eſt que la ſeule forme des Poligones inſcrits & circonſcrits de Gregoire de S. Vincent, cette forme d'échelons qui ne paroît rien, a été déciſive pour la naiſſance des nouveaux calculs, le differentiel & l'integral, & pour toutes les méthodes analytiques des tangentes, de *maximis & minimis*, des perpendiculaires, des quadratures, des rectifications qui en dependent. Peut-être tout cela ſeroit-il à naître encore ſi la méthode en étoit reſtée aux Poligones paralleles d'Archimede, qui ne different de la courbe que par des ſegmens mixtilignes, ou aux ſimples indiviſibles de Cavallieri, dont pour cette raiſon préciſe la méthode étoit infeconde, & une pure méthode de doctrine.

Mais dès que les Polygones inſcrits furent à échelons, la figure même preſenta d'un côté un rectangle qui étoit l'élement de la quadrature de la courbe, ce qui donna le calcul integral, & de l'autre côté un petit triangle dont les deux côtez interieurs étoient la décompoſition naturelle des côtez infiniment petits de la courbe ; exprimant leur poſition

oblique, les angles du Polygone, la poſition des tangentes, & la rectification même élementaire de cette courbe, d'où réſulta le calcul differentiel & tout ce que les nouveaux calculs ont de plus merveilleux.

On a beau dire, beau vanter les nouveaux calculs comme s'ils étoient tombés du ciel, ou inſpirés par revelation, ou dûs à un rare & puiſſant effort d'imagination. On n'invente que de proche en proche, & les plus hautes découvertes ſont les mieux preparées. Dès que le petit triangle infiniteſimal eût paru entre la Courbe & le Polygone à échelons, le celebre *Barrow* le remarqua, & les très-celebres *Newton* & *Leibnis*, ſans avoir eû trop beſoin de ſe donner le mot, le mirent en calcul, ſuivant la maxime Carteſienne qui avoit prévalu, de tout mettre en calcul; maxime même déja appliquée aux Infiniment petits par l'illuſtre *M. de Fermat*, & même à ce petit triangle par Barrovv.

Aynſcom a quelque choſe encore à nous dire en réponſe à ſon P. Merſenne au ſujet de l'accuſation de Plagiariſme. C'eſt que la méthode de Gregoire de S. Vincent étoit publique & publiée avant celle de Cavallieri: Voici le fait. Gregoire étoit extêmement vieux lorſqu'il donna ſon grand ouvrage, & on comprend bien que la plûpart des grandes parties de cet ouvrage, & ſur tout ſa grande & primitive méthode *de Ductu* devoient être faites long-tems avant qu'il les publiât.

Aynſcom atteſte que le livre *de Ductu*, où eſt cette méthode, fut compoſé en 1621; que deux ans après, c'eſt-à-dire, en 23, l'Auteur l'envoya à Rome à

*Griembergerus* ſon ami & habile Geometre pour l'examiner : choſe dont les lettres de celui-ci ſont foi avec bien des témoins qui vivoient lorſqu'Aynſcom écrivoit ; entr'autres un certain *Guillaume Boelmans* Diſciple de Gregoire, lequel Boelmans étant Profeſſeur de Mathematique, fit en 1634, imprimer une theſe dans laquelle il quarroit la Parabole par la Méthode *de Ductu* de ſon Maître.

Ainſi la Methode qu'on veut avoir été priſe de Cavallerius, a été compoſée 14 ans, envoyée à Rome 12 ans, ſoutenuë en theſe, & publiée un an, avant que celle des indiviſibles ait paru. Car la date du livre de Cavallerius eſt de 1635 : cela eſt bien déciſif, & fait bien voir l'injuſtice de Merſenne, & de tous ceux qui ont affecté d'embroüiller ce point d'Hiſtoire. Car on l'a affecté & très-affecté ; on en a les preuves en main qu'on produira pour peu qu'on en ſoit requis, ou forcé par quiconque s'obſtineroit déſormais de perpetuer la même injuſtice.

Après cela comment ſoupçonner un homme qui a fait un nombre innombrable de découvertes très-ſuperieures à celle des indiviſibles, de s'être rendu plagiaire pour ſi peu de choſe. Car cette méthode d'Exhauſtion, la ſeule choſe par où Gregoire reſſemble un peu à Cavallerius, n'eſt que la moindre partie de la méthode *de Ductu*, qui conſiſte à former les corps & de très-nouveaux corps à double courbure par la multiplication de divers plans diverſement poſés à plomb les uns à côté des autres : multiplication locale & de tête qui embraſſe la generation des corps par le gliſſement d'un plan ſur un autre, & va beaucoup au-delà.

Or cette méthode encore *de Ductu* n'eſt pas elle-même la moitié de la grande & generale méthode de l'Auteur, laquelle embraſſe pluſieurs méthodes toutes grandes, mais moins generales ; celle des proportionalités, celle du calcul des rapports, celle des ſeries geometriques, celle de comparaiſon, ou comme il l'appelle, de ſymbolization, &c. La vérité perce tôt ou tard. Il viendra donc un tems où on ne pourra croire l'excès d'injuſtice que le ſiecle précedent a fait à cet Auteur, ni comment on a pû s'y méprendre en faveur d'une infinité de petits Auteurs qu'on a enrichis ou qu'on a ſouffert qui ſe ſoient enrichis de ſes dépoüilles. Qu'on fouille, qu'on creuſe, qu'on compare ; plus on étudira le détail de tout ceci, plus on admirera cet Auteur : car nous ne pouvons en parler encore qu'en general & d'une maniere aſſés vague. C'eſt une mine & un vrai Perou. Venons à la diſpute de Deſcartes & des autres.

Ce fut *Daniel Lipſtorp de Lubec* qui l'engagea, & qui la ſoûtint avec aſſez peu de ſuccès pour lui & pour ſon maître, qui ſe ſeroit bien paſſé de ſe commettre avec des gens de la force de ces Géometres Flamands. Car dans ſa Lettre de Stockolm, Deſcartes, en faiſant des civilités à Gregoire, & en rabaiſſant beaucoup devant lui le ſieur *Ægide Roberval*, comme un homme de peu d'eſprit & un trop foible adverſaire, s'étoit contenté d'inſinuer qu'il n'approuvoit pas la quadrature du cercle de l'ouvrage géometrique, ce qui n'engageoit aucune diſpute. En effet, la choſe en étoit reſtée là, & Ainſcom

même avoit rendu la politeſſe à Deſcartes en le qualifiant de *Algebriſta egregius*. Mais Lipſtorp, ſe mettant imprudemment entre Deſcartes & Gregoire, comme font volontiers les Diſciples des grands Maîtres pour ſe ſignaler, Lipſtorp parla & fit parler ſon Maître, & la guerre fut auſſi-tôt declarée.

Ces paroles indiſcrettes de Lipſtorp ſe trouvent dans ſes *Specimina Philoſophiæ Carteſianæ*, imprimés en 1653. S'il ſe fut contenté d'y loüer Deſcartes abſolument & ſans aucune comparaiſon odieuſe, il ne pouvoit en trop dire. Deſcartes eſt ſans difficulté un très-grand Homme, grand Métaphiſicien, grand Dialecticien, grand Phyſicien, ſur-tout, grand Algebriſte au reſte, & même grand Géometre. Car il étoit lui-même plus ſolidement Géometre que n'ont voulu l'être ſes Sectateurs trop aſſervis au calcul. Mais un Diſciple ne ſe modere gueres ſur la gloire de ſon Maître, perſuadé que l'éclat en rejaillit ſur lui, d'autant plus qu'il eſt plus vif.

Lipſtorp diſoit entr'autres choſes que » ce qu'il y » avoit d'admirable dans Deſcartes, étoit que par » la ſinguliere pénétration de ſon eſprit, il avoit pû » ſans difficulté déterminer ce qui étoit pénétrable » ou impénétrable à l'eſprit humain, & ſi un pro- » blême étoit poſſible ou impoſſible : *quid humano in- » genio pervium eſſet, quid non; an problema aliquod poſſi- » bile eſſet, an minus.* C'eſt pourquoi, *ajoûtoit Lipſtorp*, » ce grand homme n'a jamais touché à ce problê- » me ſi reſaſſé de la quadrature du cercle : Car il le » connoiſſoit ſi rebele & ſi heriſſé que c'étoit perdre » ſa peine & ſon tems que d'en chercher la ſolution.

» Deſorte

» Deſorte que le vaſte ouvrage de Gregoire de S.
» Vincent ne l'ayant arrêté que trois jours, il y dé-
» couvrit la ſource erronée unique d'où toutes les
» autres erreurs ont découlé, *unicum in eo erroris fon-*
» *tem, ex quo reliqui omnes promanarunt, notavit.*

Cette critique, pareille à celles qui ſont le plus à la mode de nos jours, étoit infiniment cavaliere & offenſante, étant abſolument denuée de preuves, & tout-à-fait du goût de celle de Merſenne. On ne traite point comme cela un Auteur reſpectable, & un Ouvrage ſi plein de ſublimes découvertes. On ne ſçait point comment Gregoire de S. Vincent prit la choſe. Mais le Diſciple de Deſcartes trouva dans Ainſcom un Diſciple tout auſſi zelé que lui pour ſon Maître. Ainſcom cependant étoit un homme d'honneur, incapable de paſſer les bornes d'une légitime défenſe, & qui ne pouſſa la recrimination tout au plus qu'à une petite ironie fine & ingenuë.

Il ne s'inſcrivit en faux contre aucun des éloges abſolus qu'on donnoit à Deſcartes. Mais il dit librement ce qu'il penſoit de la méthode Carteſienne d'Algebre & de Calcul. Il avoit accordé à Deſcartes le titre d'Algebriſte habile, *Algebriſta egregius.* Deſcartes, ni Lipſtorp n'en avoient tant dit en faveur de Gregoire : Ainſcom ne retracta point cet éloge, mais il s'en tint là, & en continuant de regarder ſon adverſaire comme loüable d'avoir perfectionné ou inventé l'Algebre, il regarda cette Algebre comme une petite reſſource pour aller plus loin dans la Géometrie. C'étoit le préjugé du tems : nous avons vû que c'étoit auſſi celui de M. Nevv-

ton ; & nous avons dit nos raiſons en faveur de ce prejugé qui eſt auſſi le nôtre.

Ainſcom applaudit donc à la ſageſſe que Lipſtorp attribuoit à Deſcartes, de n'avoir jamais tenté l'affaire des quadratures : » Non, *dit-il*, qu'elles ſoient » impoſſibles ou impénetrables à l'eſprit humain, » mais parce que connoiſſant bien les bornes & » les limites de ſon Algebre, *ſed quia Algebræ ſuæ* » *terminos ac limites probe noſcens*, il la jugeoit peu » capable de ſe méſurer avec un problême ſi élevé, » *illam tam ſublimis problematis ſolutioni imparem videret ;* » & qu'apparemment il avoit déſeſperé d'en venir » à bout par la Géometrie ordinaire, *communi autem* » *Geometriâ idem perficere ſe poſſe deſperaret.*

Ainſcom ajoûte avec raiſon qu'il eſt ſurpris que Deſcartes ayant découvert cette prétenduë ſource d'erreurs dans l'ouvrage géometrique en queſtion, ne l'ait pas publiée ou fait connoître au moins à quelqu'un, & à Lipſtorp même qui auroit pû s'en faire honneur, ſuppoſé que Deſcartes jugeât cet honneur trop au deſſous de ſa gloire. Pour le moins, falloit-il charitablement détromper le public, auprès de qui l'autorité de Deſcartes, qui eſt comme ſur-humaine pour ſes partiſans, auroit été d'un grand poids pour le détromper d'un Ouvrage qui, ſelon l'expreſſion de Meibom, tenoit enchaîné tout l'Univers, *cum ab autoritate Carteſii, quæ apud illos penè ſuprà humanam eſt, non leve momentum res ea habitura eſſet.*

Cependant Ainſcom, fier qu'on n'attaquât un Ouvrage géometrique que par voye d'autorité, &

par des raiſons & des convenances philoſophiques, triomphoit & ſe confirmoit de plus en plus dans la bonne opinion qu'il avoit de ſon Maître & de ſes quadratures, dont il paroît plus perſuadé que ſon Maître même. *Philoſophicas rationes*, dit-il, *& neſcio quas congruentias afferre, dum de re Geometricâ pronuntiandum, ineptum planè & abſurdum eſt.*

On peut pourtant un peu excuſer Deſcartes, qui du reſte avoit eu la ſage diſcretion de ne rien hazarder là-deſſus dans le public. L'évenement entraîne les ſages, & les plus grands Philoſophes ont peine à ſe défendre de toutes ſortes de préjugés populaires. L'eſprit de l'homme eſt ainſi fait que tout ce qui eſt un peu difficile il le traite d'impoſſible, & que tout ce que bien des gens ont ſouvent tenté ſans aucun ſuccès, lui paroît une choſe à l'épreuve de toutes les tentatives. La quadrature du cercle eſt certainement juſqu'ici au-deſſus de tous les efforts qu'on a faits pour y parvenir.

Peut-être n'y a-t-il point eû de grand Géometre depuis Euclide juſqu'à Archimede, & depuis Archimede juſqu'à Gregoire de S. Vincent incluſivement, qui n'ayent travaillé toute leur vie pour la trouver. Depuis ce tems là on y a peut-être un peu moins travaillé en général; on aſſure pourtant que M. Newton s'y eſt exercé toute ſa vie; & du reſte les quadratures en géneral, & la quadrature du cercle en particulier, ont été le grand objet de la nouvelle Géometrie. Il paroît cependant qu'elles ne ſont pas l'objet propre du calcul, & qu'au moins l'Analyſe Carteſienne n'alloit point-là. De ſoi l'Analyſe eſt

bornée à ce qu'on appelle des Problêmes, *Problêmes lineaires*, en prenant cette expreſſion dans un ſens un peu étendu. Deſcartes ne pouvoit pas tout faire, & c'étoit beaucoup que de corriger le mauvais goût de ſon tems. La Géometrie y étoit dégenerée en un petit calcul Algebrique & en petits problêmes qui n'avoient pour objet que les proprietés abſtraites des nombres. Deſcartes ramena le calcul à la Géometrie, & aux problêmes géometriques, à determiner des points, à trouver des lignes, à ce qu'on appelle les lieux géometriques & la conſtruction des équations. Ces problêmes par leur ſubtilité valent bien peut-être toute autre ſorte de Géometrie; mais ce ne ſont que des problêmes, des moyens & non un but, des moyens même inutiles & frivoles, & qui ceſſent d'être des moyens dès qu'on s'y arrête comme à un but : ce ſont des pratiques ſpeculatives & idéales, plus difficiles même que les plus ſubtiles théories.

Enfin la Géometrie Carteſienne ne paſſa jamais cette borne, & peut-être même ne l'aurions-nous point encore paſſée, vû l'aſcendant que prit d'abord la méthode Carteſienne : mais Gregoire de S. Vincent avoit par trop de découvertes & de nouvelles vûës ouvert la veritable carriere, & montré le vrai but & la vraie Géometrie, qui conſiſte à méſurer les corps, les ſurfaces & les lignes, & par conſéquent à trouver des quadratures : Car ſous ce nom général de quadratures on entend la méſure de ces trois ſortes d'étenduës.

Deſcartes donc nourri au calcul, à l'algebre, aux

problêmes, & voyant que tous les efforts qu'on avoir faits pour la quadrature du cercle avoient échoüé, ne doutoit pas apparemment qu'elle ne fût impoſſible, & s'applaudiſſoit comme d'un trait de prudence & de ſageſſe, de s'être jetté dans un genre de Géometrie qui l'éloignoit peut-être plus qu'il ne penſoit du vrai but.

Cependant le Livre de Gregoire de S. Vincent parut & excita en naiſſant de grands mouvemens dans les eſprits. Le premier jugement de Deſcartes fut ſans doute celui que Lipſtorp rapporte, que l'Auteur avoit manqué le but comme les autres; & comme l'Ouvrage étoit vaſte, il crut que ſur quelque faux principe Gregoire avoit entaſſé bien des erreurs: non-ſeulement Deſcartes, mais tout Géometre un peu au fait, ſans être même perſuadé de l'impoſſibilité, & ſur la ſeule connoiſſance de l'extrême difficulté du projet, porte le même jugement de tout nouvel Ouvrage qu'on lui préſente ſous le titre de la Quadrature du Cercle.

Etoit-ce la peine de lire un Ouvrage bâti ſur un faux principe, aboutiſſant à un Paralogiſme, & tout ſemé par conſéquent de groſſieres erreurs? Deſcartes vrai-ſemblablement jetta les yeux ſur l'ouvrage géometrique, le parcourut des yeux, mais ne le lut pas. Les trois jours qu'on dit qu'il s'y arrêta, ne ſont apparemment que pour la forme & pour une certaine bienſéance. Avoir lû un ouvrage ſi vaſte & ſi plein en trois jours, n'étoit pour Deſcartes même que l'avoir effleuré des yeux.

Comme même le principe d'erreur en queſtion

n'eſt qu'en idée, que le courant de l'ouvrage eſt fort ſain, & que s'il y a des erreurs elles ſont en petit nombre & uniquement dans la concluſion, & dans le morceau final des quadratures, c'eſt-à-dire, dans les trente ou quarante dernieres pages de tout l'ouvrage, il eſt clair que pour trouver ces erreurs, il auroit falu parcourir un enchaînement de près de deux mille Propoſitions, nouvelles & profondes, heriſſées même & difficiles : choſe tout-à-fait impoſſible en trois jours, ou même en trois mois, alors ſur tout que rien de tout cela n'avoit été remanié ni éclairci : Car aujourd'hui quelqu'un qui ſçait un peu les nouveaux calculs, ſçait preſque tout ſon Gregoire d'avance, & peut le lire facilement en peu de mois.

Le lire ! ou le parcourir des yeux pour y reconnoître les choſes qu'il ſait déja ! Car il y a raiſon de douter, qu'un eſprit accoutumé au calcul fût capable non-ſeulement de la patience, mais même de l'attention & d'une certaine pointe de pénétration, que demande une ſuite de raiſonnemens diſtincts, articulés & bien énoncés par de vrayes ſyllabes, de vrais mots, un vrai diſcours. Et ſur ce pied Deſcartes lui-même auroit eu peine à ſe captiver à lire un ouvrage de pure Géometrie de l'étenduë de celui-ci. Et on peut croire que la perſuaſion où il fut d'abord de la quadrature manquée, augmenta en lui la repugnance qu'il avoit à cette lecture, & qu'à ſon tour cette repugnance confirma tout-à fait cette perſuaſion : & qu'ainſi Deſcartes n'avoit jamais lû ce Livre ni en trois jours ni en mille, lû au moins pour

en juger d'une maniere digne de lui, & de cette façon déciſive que lui prête Lipſtorp.

L'Ouvrage avoit pourtant des Partiſans & des Admirateurs, & Deſcartes avoit les ſiens auſſi, & étoit un Maître en Iſraël. Deſcartes étoit même homme à entrevoir un nombre de découvertes & de ſublimes vérités qui brilloient dans cet Ouvrage. Voilà les principes ſur leſquels il ſe gouverna dans tout ce que le commerce du monde l'engagea de faire ou de dire en public ou en particulier ſur cet Ouvrage. En public & dans les diſcours qui pouvoient revenir à l'Auteur ou à ſes Diſciples, comme la Lettre de Stockolm que nous avons rapportée, Deſcartes parla obligeament de l'Auteur, & rechercha ſon amitié, ſe contentant d'inſinuer ſon ſentiment ſur le point particulier de la quadrature circulaire.

Mais en particulier, & devant ſes Diſciples affidés qui ſans doute le preſſoient de s'expliquer & n'avoient les yeux que ſur lui, en attendant l'Oracle pour juger eux-mêmes d'un Ouvrage qui tenoit toute l'Europe ſçavante enchaînée, en ſervitude ou en ſuſpens. Deſcartes, obligé de parler clair & en Maître, crut ſans doute pouvoir hazarder le jugement définitif, que Lipſtorp eut l'imprudence de faire éclater.

Deſcartes ne fut pas le ſeul grand Géometre, qui ſe laiſſa impoſer par le préjugé géneral de l'impoſſibilité de la quadrature ; quoiqu'il fût un des plus reſervés à faire éclater ſon jugement ou ſon préjugé contre l'Auteur ; reſerve qui fait ſentir elle ſeule ſa ſuperiorité ſur tous ces grands Géometres. M. Hu-

guens de l'Académie Royale de Paris, & le P. Leotaud Jéſuite, inférieurs en ce point à Deſcartes, mais ſupérieurs aux AA*** & aux autres critiques, paſſant à l'Auteur tous ſes préliminaires, toutes ſes vrayes découvertes, c'eſt-à-dire, tout ſon premier volume & plus des trois quarts & demi du ſecond, renfermerent ſagement leur critique ou leur examen dans le morceau final des quadratures. Huguens fit un Livre exprès pour en decouvrir le faux: Ce Livre porte le nom Grec de ἔξετασις ou *exetaſis*, critique ou diſcuſſion.

Cette critique, non plus que celle de Leotaud ne demeura point ſans réponſe. Ainſcom fidéle à ſon Maître le défendit *tela omnia contra*, & ce qu'il y a de ſurprenant le défendit bien, & perſonne ne put alors ſe vanter d'avoir découvert le faux ou le foible des quadratures de S. Vincent. La plûpart n'y trouverent d'erreurs que celles qu'ils ſubſtituerent eux-mêmes à celles qu'ils y imaginoient & qu'ils vouloient abſolument y trouver: Or ce qu'on ne put faire alors, perſonne ne l'a tenté depuis, & les vrayes beautés de l'Ouvrage gagnant d'un autre côté la Géometrie, & l'habitude de lire les Livres de pure Géometrie ſe perdant à force de calcul, le gros du public Géometre perdit de vûë Gregoire & l'erreur même de ſes quadratures; ceux qui auroient pû en découvrir le défaut ayant interêt à faire oublier juſqu'au nom même de l'Auteur, c'eſt-à-dire, de la mine où ils puiſoient de quoi embellir leur calcul.

J'ai dit le *foible* & le *défaut* des quadratures de Gregoire:

Gregoire : Car Lipſtorp, AA***, Merſenne, Meibom, Alexis Sylvius, Huguens, Leotaud, Deſcartes, outrerent les choſes en voulant y découvrir des erreurs, & ſurtout des ſources d'erreurs. Ils n'y en découvrirent point, mais le comble du Paradoxe fut qu'ils ne pouvoient pas même y en découvrir, parce qu'il n'y en avoit point, ſi ce n'eſt un petit nombre de la part de l'Imprimeur, dont AA*** eut la gloire d'en découvrir une qui lui attira un ſincere remerciment de la part de l'Auteur.

C'eſt ici une eſpece de prodige ou de merveille de l'eſprit humain, qu'on ne prie perſonne d'admirer ni de croire avant que de l'avoir verifié de ſes propres yeux. Eſt-il croyable qu'un Auteur ait entrepris de trouver la quadrature du cercle, que pendant cinquante années il l'ait ſuivie de très-près, & comme de poſte en poſte, par toutes ſortes de routes nouvelles & de ſentiers eſcarpés, à travers trois, ou peut-être ſix mille propoſitions, & que tous les plus grands Géometres d'un ſiécle entier où la Géometrie a été extrêmément cultivée, ayent trouvé dans ce labyrinthe une multitude innombrable de vérités ſublimes & fécondes ſans pas une erreur, & que l'Auteur n'ait manqué que ſon dernier but ſans jamais s'égarer dans le chemin ; qu'il ait manqué ce but en le ſaiſiſſant, qu'il l'ait ſaiſi ſans le prendre, qu'il l'ait pris ſans le tenir ?

Il eſt tems d'éclaircir ce myſtere & de réſoudre ce problême qui n'eſt pourtant pas ſans exemple dans la Géometrie. Gregoire a donné la quadrature comme Euclide & Archimede l'avoient donnée, &

comme les plus grands Géometres de ce ſiecle l'ont donnée, non abſolument, mais hypothetiquement. Euclide ou Archimede ont démontré que le cercle eſt égal à un triangle qui a pour baſe ſa circonference, & pour hauteur ſon rayon, que la circonference eſt égale à la tangente de la ſpirale, que la ſphere eſt égale à un cone qui a ſa ſurface pour baſe, & pour hauteur ſon rayon, que la ſurface ſpherique eſt quatre fois le cercle générateur, que le cylindre eſt triple de la ſphere & du cone, &c. C'eſt ainſi que Torricelli a demontré, ou tout autre, que la Cycloïde eſt triple du cercle générateur; Gregoire, que la tangente de la parabole donne la rectification du cercle; M. Nevvton, qu'une infinité de courbes étoient quarrables, en ſuppoſant la quadrature du cercle ou de telle autre de ces courbes, &c.

Voilà tout le myſtere, & la maniere dont notre Auteur a quarré le cercle ſans le quarrer; comme qui meſureroit une choſe par une meſure immeſurable elle-même ou inconnuë enfin; Auteur plus admirable au reſte, après s'être ſi avant engagé dans un ſi tortueux dedale, d'avoir retrouvé pour en ſortir la porte par où il y étoit entré, que ſi le hazard l'avoit fait aboutir, comme il pouvoit arriver, à l'iſſuë par où il avoit prémédité de ſortir avec ſon butin; puiſqu'enfin il en eſt toujours ſorti, ſinon ſans gloire, du moins ſans aucun deshonneur & ſans payer aucun tribut à l'erreur, & en remportant même avec aſſez de gloire de bons lambeaux de cette riche toiſon.

Il vient de nous échaper que le hazard auroit bien

pû conduire l'Auteur à l'iſſuë de ſon projet, comme ſi nous penſions que la quadrature du cercle fût une choſe poſſible à trouver. Et pourquoi ne le penſerions-nous pas en effet ? Deſcartes l'a cruë ſans doute tout-à-fait impoſſible. Aujourd'hui cette idée paroît la plus repanduë parmi nos Géometres, & M. de Fontenelle qui eſt un des plus célebres a inſinué dans ſes élemens de la Géometrie de l'Infini, pp. 513, & 14, une eſpece de démonſtration de cette impoſſibilité.

Mais, outre que l'ingenieux Auteur eſt bien éloigné de donner ſa démonſtration pour géometrique, ou même abſolument pour une démonſtration reguliere d'aucune eſpece, & que toute cette théorie Métaphyſique découle du principe d'un infini numerique, dont on a démontré le faux, il n'y a pas d'incommenſurabilité qui empêche le rapport du diametre à la circonférence, ou du quarré au cercle, d'être un rapport fini & déterminé aſſignable de ſoi & déterminable par conſéquent.

Une preuve même ſans replique, que toutes ces eſpéces diverſes d'incommenſurabilités auſquelles on veut élever le cercle, ſont fauſſes, c'eſt que la quadrature d'un cercle infini, ou d'une portion infiniment petite d'un cercle fini, eſt poſſible, & même déja donnée (*Mathem. univerſ. pag.* 651 :) ce qui ſeul démontre que l'incommenſurabilité de la quadrature eſt de la premiere eſpece, & ſans doute de la ſeule réelle, de la ſeule au moins qui ſoit démontrée. Car cette incommenſurabilité eſt telle, que l'infini la fait diſparoître & reparoître tour à

tour; témoin la diagonale & le côté dont les quarrés ſont commenſurables, les cubes incommenſurables, &c.

Après cela l'incommenſurabilité n'empêche pas qu'on ne trouve tout auſſi facilement par la Géometrie les incommenſurables que les commenſurables, l'incommenſurabilité n'étant pas tant une difficulté géometrique qu'une impoſſibilité Arithmetique, qui vient de l'imperfection des nombres comparés avec l'étenduë, dont ils ne ſçauroient exprimer les richeſſes, n'étant faits que pour marquer ſes bornes, & ne pouvant jamais repréſenter ſa grandeur abſoluë qui eſt infinie.

S'il y avoit diverſes eſpeces d'incommenſurabilité plus élevées les unes que les autres, elles ſe ſerviroient les unes aux autres comme de contregardes ou d'avant-murs. On ne pourroit approcher de la ſeconde qu'après avoir atteint la premiere, & comme on ne pourroit qu'approcher de la premiere ſans jamais l'atteindre, toute approche de la ſeconde, & à plus forte raiſon de la troiſiéme & de la quatriéme, ſeroit abſolument interdite. La quadrature eſt donc de la premiere eſpece d'incommenſurables, puiſqu'on en approche d'auſſi près qu'on veut, d'auſſi près enfin que de la racine par exemple, de 3, de 5 de 6, &c. ſans jamais rencontrer de mur ou de foſſé qui barre le chemin, & qui en tienne éloigné d'aucune diſtance determinée. C'eſt peut-être ici une démonſtration contre les ingenieuſes conjectures du ſçavant Académicien.

Perſonne n'a donc démontré ni même gueres en-

trepris de démontrer l'impoſſibilité de la quadrature du cercle. Mais on a ſouvent entrepris de démontrer, & tous les plus célebres Géometres ont ſuppoſé la poſſibilité de cette quadrature. Mais nul ne l'a tenté avec plus de ſubtilité & de profondeur qu'un certain Auteur Allemand ou Flamand, Diſciple ou Contemporain de Gregoire de S. Vincent: ſon nom eſt *Della faille*. C'eſt dans une ſimple Theſe de Mathematique qu'il a fait voir que le centre de gravité d'un Arc, ou d'un Segment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré.

C'eſt-là une quadrature hypothetique & une des belles découvertes particulieres du dernier ſiecle. Dira-t-on qu'un arc ou un ſegment de cercle n'ont point de centre de gravité ? Le contraire eſt demonſtratif. Il faut cependant donner aux choſes leur valeur, & convenir qu'il n'y a pas plus de démonſtration géometrique de la poſſibilité que de l'impoſſibilité de cette quadrature, & que ſeulement cette poſſibilité eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée, parce que le cercle comme toute autre courbe a une quadrature, c'eſt-à-dire, eſt égal à une figure quarrée ou rectiligne, & que ſa capacité eſt déterminée entre des limites qu'on aſſigne & qu'on raproche, ſinon infiniment, du moins à l'infini.

Quelques prétendus Géometres ont imaginé que le cercle échappe par ſa courbure, d'autres par ſon uniformité, par ſa perfection : comme ſi nous ne quarrions pas bien d'autres courbes, ou comme ſi la quadrature du cercle n'étoit pas inſéparablement

liée à celle de l'éllipſe, de l'hyperbole, & d'une infinité d'autres courbes non uniformes, non parfaites, bizarres même, & même rectilignes. Car le cercle eſt égal à un triangle qui a pour hauteur le rayon & pour baſe la circonférence; & qu'on ne diſe pas que cette baſe eſt fictice & que la circonférence ne peut ſe redreſſer, puiſqu'elle eſt démontrée égale à la tangente naturellement droite de la ſpirale, ou de la parabole.

Sous la forme même circulaire & entre des lignes purement circulaires, ne quarre-t-on pas la lunule d'Hippocrate & ſes diverſes portions, ſelon toute raiſon donnée? Gregoire de S. Vincent n'a-t-il pas reduit avec un art merveilleux des corps circulaires & non circulaires qu'il a cubés, & dont il a quarré les ſurfaces circulaires? L'éllipſe cylindrique de *Laloubere* n'eſt-elle pas quarrée?

A quoi tient-il donc qu'on ne quarre le cercle? ſi nous ſçavions preciſément à quoi il tient, dès ce moment il ne tiendroit plus à rien. Nous ôterions l'obſtacle s'il étoit clairement reconnu, & dans le cas de l'impoſſibilité, nous ſçaurions qu'on ne peut l'ôter, & le problême ſeroit réſolu, même par ſon irréſolubilité démontrée. Mais ſi nous ignorons la difficulté préciſe, & le moyen précis approprié pour la ſurmonter, nous ſçavons en géneral la route qu'on peut prendre pour y arriver, & celle qu'on a priſe juſqu'ici pour arriver à d'autres quadratures, ſinon auſſi difficiles, qui avoient au moins leur degré de difficulté.

Car tout cela ne peut rouler que ſur la difference

du plus au moins de difficulté. Et comme notre unique but dans une ſi longue Préface, n'eſt & ne peut être que d'ouvrir les vrayes ſources de l'invention géometrique, d'en montrer le vrai but, d'en indiquer les vrais moyens, il eſt tems que nous recüeillions de tout ce qui précede une méthode d'étudier & de cultiver la géometrie, qui nous méne au but ou à des choſes au moins auſſi importantes que le but particulier & précis de la quadrature du cercle.

On peut abſolument ſe paſſer d'arriver à ce but, ſi on ne regarde que l'uſage pratique de cette quadrature, puiſqu'on en approche autant qu'il le faut & qu'on le peut dans cette pratique uſuelle. Mais on ne doit pas, malgré cela, ceſſer d'enviſager ce but, puiſque la providence ſemble y avoir attaché les autres découvertes, & les avoir toutes ſemées ſur le chemin qui y conduit, & qu'enfin en toutes ſortes d'opérations ſpirituelles & méchaniques l'homme a beſoin de ſe propoſer un but élevé.

Car il eſt élevé, & nous ne devons pas en diſſimuler la difficulté à ceux à qui nous le propoſons, étant bien éloignés, en aiguillonnant les puſillanimes, de vouloir trop encourager les préſomptueux. Ce ſont les Géometres habiles qui ſont ici les puſillanimes, parce qu'ils ſentent en effet la difficulté: & il n'y a que les petits génies, les demi-Géometres qui entreprennent la quadrature avec trop de confiance, ſans prendre preſque aucun des moyens neceſſaires pour en ſurmonter la grande difficulté: de tels gens n'arrivent pas au but, & ne cuëillent mê-

me ſur le chemin aucune autre eſpece de découverte, mais un nombre d'erreurs pareilles à celles que Deſcartes ſoupçonnoit & que Roberval, Merſenne, Huguens vouloient trouver dans Gregoire de Saint Vincent.

Prennent-ils même le vrai chemin, ces chercheurs de pierre Philoſophale plûtôt que de quadrature ? munis à peine d'un peu de Géometrie élementaire, ils errent au hazard, portant la préſomption & l'ignorance juſqu'à dire que le hazard pourra bien un jour enfanter cette grande découverte, & que ce ſera peut-être un médiocre Géometre de bons ſens qui fera le coup. Car, diſent-ils, les prétendus grands Géometres y font trop de façons & c'eſt du rafinement que toute cette Algebre, cette haute Analyſe, cet infini équivoque, ces ſections coniques, ces courbes, &c. Voilà en vérité de beaux titres pour entreprendre une découverte de cette force, que des peut-êtres & des hazards préparés par une médiocrité de genie & de ſcience avec une doſe de bon ſens, comme ſi le bon ſens alloit-là !

Mais c'eſt ce hazard qui merite un bon éclairciſſement, parce qu'il a paſſé comme en proverbe parmi même les Philoſophes & les Géometres habiles, & dans les Livres comme dans le diſcours, que c'eſt le hazard qui fait les découvertes, & que ce ſera peut-être un ignorant en Géometrie qui trouvera la quadrature en queſtion.

Nous ne voyons pas cependant qu'un Phyſicien faſſe des découverres géometriques, ni qu'un Géometre purement Géometre en faſſe de Phyſiques, ni

ni un Horlogeur dans la Peinture, ni un Peintre dans la Mechanique, ni un Mechanicien dans la Chimie, ni un Chimiſte dans la Theologie, ni un Theologien dans la Médecine : chacun en fait dans ſon metier & dans la ſphere qu'il habite. Or chaque ſphere génerale a ſes ſpheres particulieres & ſubalternes, ou ſes divers degrés d'élevation; Jupiter a ſes Satellites diverſement éloignés de ſon centre, ſelon le dégré de leur peſanteur. La ſphere terreſtre même a ſes couches & ſes élemens. Si les animaux faiſoient des découvertes, nul hazard n'en feroit faire aux Poiſſons dans l'air, ni aux Oiſeaux dans l'eau.

De même celui qui ne ſçait que les élemens d'Euclide & qui ne connoît que la ligne droite & le cercle, n'ajoûtera jamais aux proprietés des ſections coniques, l'Arithmeticien ne perfectionnera jamais l'Algebre, le ſimple Algebriſte n'enrichira point d'une nouvelle formule le calcul infiniteſimal, l'Aſtronome ne trouvera point le paſſage de l'Europe à la Chine par les mers du Nord, ni le Géographe la conciliation de l'immobilité de la terre avec ſon tranſport autour du Soleil. Et par une ſuite naturelle un petit eſprit ne fera point de découvertes de l'ordre le plus élevé, ni un demi Géometre de celles qui demandent une profonde connoiſſance de la Géometrie, ni un pareſſeux de celles qui ſont le fruit d'un grand raiſonnement, d'une longue méditation, d'un travail épineux, pas plus qu'un homme qui ſera à la Chine fera la découverte des mines du Potoſi.

Chaque but a ſon chemin, chaque fin a ſon

moyen, chaque ouvrage a ſon travail, chaque problême a ſon degré de difficulté qui demande un degré de genie & de capacité. Un Géometre monté par ſon eſprit & par ſa ſcience, c'eſt-à-dire, par ſes connoiſſances naturelles & acquiſes au niveau de la quadrature du cercle, peut bien ne pas la trouver, s'il ne la cherche pas, ou s'il ſe jette, même en la cherchant, dans des ſentiers qui l'en écartent malgré lui & comme ſous-main, ſans qu'il s'en apperçoive. Il peut auſſi fort bien la trouver comme par hazard & ſans la chercher d'une maniere expreſſe & ſans y penſer.

Mais ce n'eſt jamais qu'un demi hazard, puiſque la cauſe préciſe & unique pourquoi il la trouve, eſt parce qu'il a du genie, parce qu'il a de la ſcience, parce qu'il s'applique, parce qu'il connoît ſon objet, qu'il s'y affectionne, qu'il le manie, qu'il le tourne & le retourne, qu'il l'enviſage de tous les côtés, de tous les ſens, parce qu'il penſe jour & nuit à des choſes qui y ſont liées, qui y ont des rapports prochains, qui de ſoi y aboutiſſent. Celui qui découvrit les mines du Perou, étoit au Perou, dans l'endroit même où étoit la mine, & parce qu'il arracha un arbuſte qui tenoit à la mine; il n'y eut à cela d'autre hazard qu'en ce qu'il n'y penſoit pas; c'eſt-à-dire, en ce qu'il ne connoiſſoit pas la mine avant que de la connoître.

Pour trouver donc la quadrature du cercle, ou enfin quelque choſe d'équivalent, il faut ſe mettre à portée d'y atteindre, laiſſant à faire au hazard le moins qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, uniquement la derniere démarche, qui conſiſte à ne la recon-

noître qu'au moment qu'elle ſe préſente ; mais à ſe mettre en état de la reconnoître alors, & de ne pas la manquer. Car celui à qui la mine ſe découvrit après qu'il eût arraché l'arbuſte, n'en auroit pourtant jamais fait la découverte s'il n'avoit eu des yeux pour la voir, & un eſprit même pour la diſcerner, s'il n'eut connu l'Or, s'il n'avoit même eu quelque connoiſſance de l'Or en mine.

Il s'agit donc de ſavoir le degré précis, ou général au moins, de genie & ſur-tout de capacité, requis pour être à portée de cette découverte ou de toute autre découverte géometrique de pareille eſpece. Et pour cela il faut ſçavoir à peu-près le degré de difficulté du Problême. Par exemple, la quadrature de la Lunule d'Hippocrate eſt évidemment du premier degré, puiſqu'on l'a découverte dès le commencement & dans un tems où la Géometrie ne fourniſſoit que des ſecours de l'ordre le plus bas & une grande modicité de vûës Géometriques, c'eſt-à-dire, la ſimple Géometrie d'Euclide, le triangle & le cercle, la regle & le compas.

Au lieu que la quadrature de la Parabole, quarrée d'abord par le ſecours extraordinaire de la méchanique, & enſuite d'une maniere plus géometrique par Gregoire de S. Vincent, mais par un ordre de Géometrie plus élevé & par les ſections coniques, cette quadrature étoit du ſecond ordre de difficulté *au moins :* Car le génie extrêmement élevé d'Archimede & de Gregoire même, peut avoir abaiſſé tout d'un coup au ſecond degré, ce qui pour les bons eſprits ordinaires auroit été peut-être du trois ou qua-

triéme. Cependant il paroît qu'il n'y faloit que la connoiſſance un peu profonde des ſections coniques, ſuivant la nature du problême, comme il ne faloit à la lunule que le cercle & le triangle.

La triſection de l'angle & la duplication du cube appartiennent évidemment au troiſiéme ordre de difficultés, parce qu'il y faut non-ſeulement la connoiſſance ſimple des ſections coniques, mais leur comparaiſon & leur complication auſſi. L'ancienne Géometrie d'Euclide & d'Apollonius cherchoit en vain la réſolution de ces problêmes : ils n'étoient pas mûrs même pour le grand Archimede à moins que ſon genie ne ſuppléât aux moyens géometriques du troiſiéme ordre, par quelque moyen extraordinaire pareil à celui qui lui avoit donné la quadrature de la parabole.

Mais admirons la témerité des chercheurs de problêmes de profeſſion, qui, ſans pouvoir ſe flater du genie d'Archimede, & ſans aucune connoiſſance des ſections coniques, ni d'Apollonius, ni de Gregoire, cherchent pourtant toujours la triſection & la duplication par la Géometrie d'Euclide, par la regle & le compas, quoiqu'il ſoit décidé que les problêmes ſont du troiſiéme ordre au moins, & qu'ils ſoient même reſolus autant qu'ils peuvent l'être.

On ne peut pas prétendre à définir les ordres conſecutifs avec préciſion ; mais en regardant Euclide comme un premier ordre de Géometrie & de moyens géometriques, Apollonius comme le ſecond, Archimede comme le troiſiéme, & Gregoire de S. Vincent comme le quatriéme, & leur aſſo-

ciant, ſi l'on veut, leurs ordres collateraux de calcul qui ſont comme des moyens de moyens, aſſociant Diophante à Euclide, Viete à Apollonius, Deſcartes à Archimede, Nevvton, Leibnis & tous les nouveaux Analyſtes à Gregoire, & remarquant enfin que la quadrature n'eſt au niveau d'aucune de ces quatre Géometries, & qu'elle s'éleve au-deſſus de ces quatre ordres, on peut tirer ces concluſions.

1°. Qu'elle eſt au moins du cinquiéme ordre de difficulté. 2°. Que pour y atteindre, il faut, ſe mettre au niveau de ces quatre ordres de géometrie, les ſçavoir & en être bien poſſeſſeur : Et *peut-être* même, 3°. s'élever au-deſſus de ce quatriéme ordre à peu-près comme Gregoire s'eſt élevé au-deſſus d'Archimede par l'invention de pluſieurs moyens géometriques nouveaux, & par une amplification de la Géometrie ou de la matiere géometrique.

On dit *peut-être*, & c'eſt pour la conſolation de ceux qui cherchent la quadrature, ou qui veulent ſe ſignaler par des découvertes d'un ordre un peu élevé, & qui ne ſoient pas de ſimples corollaires de celles qui ont précedé. Car on peut douter ſi le calcul auquel on a aſſujetti toute la géometrie moderne, n'a pas épuiſé d'un côté le génie de ſes inventeurs, des Deſcartes, des Leibnis, des Nevvtons, &c. & ſi d'un autre côté il n'a pas émouſſé un peu les eſprits ſubalternes ; & ſi enfin tous ces grands hommes recuëillant les découvertes des quatre ordres de pure Géometrie qui avoient précedé, en prenant ſur tout l'eſprit, & en ſuivant le même fil d'invention, n'auroient pas atteint déja tout-à-fait le but, dont il

y a grand lieu de croire que Gregoire de S. Vincent n'étoit pas éloigné.

C'eſt dommage que la vaſte étenduë de cet Auteur, l'ait mis comme hors de portée, pour la plûpart de ceux qui ont cultivé depuis ce tems-là la géometrie, & que ceux qui ont pû le lire, ayent été trop ſenſibles au détail de ſes découvertes, & à la gloire qui pouvoit leur revenir du talent qu'ils avoient de les remanier par le cacul. Moyennant cela preſque perſonne n'a pû ou voulu ſe donner la peine d'embraſſer le corps entier de l'Ouvrage : perſonne n'en a pris le plan géneral, le ſyſtême, l'eſprit.

C'eſt cet eſprit, le même que celui d'Archimede, d'Apollonius, d'Euclide, de toute la ſaine antiquité, qui pouvoit ſeul, & qui pourroit ſeul encore aujourd'hui r'animer l'eſpoir de la quadrature, en reveiller les étincelles, en revivifier les ſemences. Car on a beau dire qu'en chemin faiſant, Gregoire a ſemé mille théories qui ne ſe rapportent point à cette quadrature : Il n'y a pas une propoſition dans tout cet immenſe ouvrage qui n'aille très-directement à ce but, qu'il s'étoit propoſé dès le commencement, & qu'il n'a pas perdu un ſeul inſtant de vûë.

La géometrie a-t-elle d'autre but après tout? Tout Auteur ſyſtematique qui cultivera cette ſcience de tête & avec connoiſſance de cauſe, ſans trop maſquer ſon objet de calcul, aboutira toujours là, ou tournera neceſſairement tout autour. Le calcul tourne, mais ne fait que tourner comme par un cercle

dont elle eſt le centre. La méthode ancienne qui eſt celle du genie & du raiſonnement clair & articulé, tourne peut-être, mais en approchant, comme par une ſpirale, dont il faut eſperer que les retours ne ſeront pas infinis en nombre ni en étenduë.

Un préjugé avantageux, que ces approches ont un centre auquel on arrivera enfin & peut-être bientôt, ſi on ſuit la vraye route; c'eſt que le mouvement qui porte à ce centre, eſt un mouvement veritablement centripete & acceleré. Apollonius encherit beaucoup ſur Euclide, Archimede à proportion autant ſur Apollonius, & Gregoire pour le moins autant ſur Archimede. Un cinquiéme encheriſſeur de cette force pourra bien atteindre au but.

Mais il en doit couter à ce cinquiéme, s'il faut qu'il ente ſon génie ſur celui de ces quatre Auteurs, ſur tout s'il eſt ſi difficile d'embraſſer le vaſte ouvrage de Gregoire de S. Vincent. Il en doit couter ſans doute pour faire mieux que n'ont fait de ſi grands hommes: mais on pourroit ſe contenter de la réponſe, qu'une grande entrepriſe demande un grand courage, une grande hardieſſe, un grand travail. On ne veut cependant décourager perſonne. S'il faloit lire Gregoire d'un bout à l'autre, on pourroit y trouver de la difficulté, non qu'abſolument le ſtile de cet Auteur ſoit difficile, ni ſes propoſitions longues & embaraſſées; mais parce que le total de l'Ouvrage eſt long, & que ce ſtile ancien purement géometrique & de pur raiſonnement, de pure idée demande à la longue une forte attention dont tout

le monde n'eſt pas capable, à moins qu'on ne voulût ſe ſurmonter d'abord un peu pour en prendre l'habitude ; ce qui ſeroit bien le mieux.

Le ſtile du calcul qui couvre le raiſonnement & enveloppe les idées eſt plus aſſorti, avons-nous dit, au commun des eſprits : actuellement même la plûpart en ont l'habitude, & quand on a cette habitude, il n'eſt pas aiſé de ſe façonner à l'ancien ſtile. Heureuſement Gregoire de S. Vincent, Archimede & les autres de ce ſtile ont été mis & remis mille fois en calcul. On peut donc les étudier d'abord par là ſi on ne ſe ſent pas la force de les étudier en eux-mêmes : mais à condition qu'on les étudie enſuite bien en eux-mêmes, ſi l'on veut en prendre l'eſprit, & l'eſprit d'invention qui eſt un eſprit d'idée, de reflexion, de méditation, de raiſonnement, eſprit tout-à-fait entravé, émouſſé, éteint dans le calcul.

Voici donc l'ordre d'étude que l'on conſeilleroit à quelqu'un qui auroit le courage & le goût de ſe rendre ſolidement Géometre. Ce ſeroit en géneral de commencer par le calcul, & de finir par la pure Géometrie en les entremêlant peu à peu pour n'être pas trop eſclave du premier, & ſe familiariſer inſenſiblement à la derniere.

Par exemple on étudieroit Euclide par le calcul dans Lamy, Malezieu, &c. On le parcourroit enſuite ſans calcul dans Tacquet, Dechales, &c. On ſe rendroit après cela un peu profond dans l'Arithmetique, l'Algebre, l'Analyſe & dans toutes les grandes parties du calcul, qu'il auroit ſuffi d'ébaucher

cher un peu pour l'intelligence d'Euclide.

De-là on paſſeroit aux Sections coniques de M. de l'Hôpital, & enſuite à l'application de l'Algebre à la Géometrie par M. Guinée. On viendroit tout de ſuite à la Géometrie de Deſcartes, qu'on liroit d'abord dans l'excellent & très-ſolide Commentaire du P. Rabuel, imprimé depuis peu; & on parcoureroit enſuite deux ou trois fois le texte pur de Deſcartes. On ſe jetteroit au ſortir de là dans l'Analyſe démontrée du P. Reynaud de l'Oratoire, c'eſt auſſi un bon Livre & un Auteur de l'Académie.

On fait cependant reflexion, que voilà bien du calcul, & qu'on pourroit s'y trop roidir l'eſprit, & que peut-être ſeroit-il mieux après les Sections coniques de M. de l'Hôpital de ſe jetter un peu dans Apollonius, ſoit en Original, ſoit en Commentaire géometrique, dans Archimede, ou même tout d'un coup dans l'ouvrage géometrique de Gregoire, entremêlant la Géometrie avec le calcul, & faiſant deſormais marcher de pair, & comme en front de bandiere ces deux eſpeces de troupes legionaires & auxiliaires, infanterie & cavalerie, armes peſantes & armes legeres; la Géometrie au centre, & comme au corps de bataille, & le calcul comme ſur les aîles, ou à l'avant & à l'arriere-garde, pour ouvrir les chemins, pour ébaucher les idées, les détailler enſuite, en épuiſer les corollaires, & en quelque ſorte faire des priſes & achever la victoire.

La lecture, par exemple, de Rabuel, de Deſcartes, de Reynaud marcheroit en même-tems, que les Livres du Cercle, de l'Ellipſe, de la Parabole,

de l'Hyperbole, de Gregoire de S. Vincent, qui auroit déja été préparé par la lecture de M. de l'Hôpital, & qui trouveroit ſon Commentaire perpetuel dans ces trois ou quatre Auteurs.

L'Analyſe de l'Infini eſt aſſez à fond dans le ſecond volume du P. Reynaud. Peut-être après y en avoir pris une legere connoiſſance, ou même laiſſant-là ce volume qui a d'excellentes choſes, mais qui a bien des embarras, ſur tout dans ſon Traité des Sections Coniques: vaudroit-il mieux ſe jetter dans l'Arithmetique des Infinis du célebre M. Wallis, dans le Traité des Series de M. Bernoulli, dans l'Analyſe des Infiniment Petits de M. de l'Hôpital, dans les divers morceaux de calcul de M. Newton, & enfin dans la ſeconde Partie des Infiniment Petits de notre M. Stone; entremêlant cette lecture de celle du *Ductus plani in planum* de Gregoire, & de tout ſon ſecond volume, qu'on lira aſſez courament lorſqu'on ſera un peu plein de tous ces Auteurs de Calcul, ſur-tout des Sections coniques de M. de l'Hôpital & de l'Arithmetique des Infinis de Wallis, & ſi l'on veut du Traité des Series de M. Bernoulli: on pourroit y ajouter auſſi les Sections Coniques de Wallis.

Car on remarquera que de tous les Auteurs, dont la lecture peut le plus ſervir pour l'intelligence de l'ouvrage géometrique de Gregoire de S. Vincent, M. Wallis eſt celui qui mérite le plus d'être lû. Son Arithmetique des Infinis, eſt comme le précis Analytique de tout cet ouvrage géometrique. Car tandis que Roberval, Merſenne, Huguens, Leotaud s'a-

muſoient à éplucher cet ouvrage, & à y trouver des erreurs, Wallis plus clair-voyant & plus laborieux, s'occupoit ſolidement à le defricher, & à en compoſer ſon Arithmetique, qui eſt un excellent Livre, & un des meilleurs que nous ayons ſur cette matiere : l'Auteur ayant bien plus viſé à y mettre toutes ces ſublimités géometriques à la portée de tout le monde par un ſtile Arithmetique, & un peu afoibli par une induction tirée de la méthode des indiviſibles de Cavallieri, qu'à ſe rendre admirable par trop de force géometrique d'exhauſtion ancienne, ou par une Algebre & une Analyſe moderne.

Un Ouvrage dont on ne penſoit point à parler ici, & dont quelques perſonnes veulent qu'on faſſe mention, c'eſt celui de la *Mathematique Univerſelle, abregée à l'uſage & à la portée de, &c.* l'Ouvrage eſt aſſez connu. Mais peut-être ſera-t-il bon d'avertir ceux, qui ſeront bien-aiſes d'épargner la multitude des Livres, la longueur du chemin, & la difficulté du travail ; que cet Ouvrage renferme tout ce qui eſt neceſſaire pour lire Gregoire, Archimede, Apollonius & Euclide, dont il contient un précis aſſez étendu : qu'il a même été fait dans l'eſprit d'introduire dans la lecture de ces Auteurs anciens, en ſuppléant à celle de la plûpart des modernes, qui n'ont gueres fait de corps complet de géometrie, & qui ſont du reſte extrêmement embarraſſés de calcul, de conſtructions, de problêmes, de choſes en un mot non démontrées, non démonſtratives, & fort peu méthodiques.

Quoiqu'il en ſoit, quand on a une fois lû Wallis, de l'Hôpital, Stone, & ſi l'on veut Rabuel, ou mieux encore, la Mathematique Univerſelle, on ne trouve preſque plus rien de nouveau, ni par conſéquent de difficile dans tout l'Ouvrage de Gregoire de S. Vincent, ni même d'Apollonius & d'Archimede; & on peut en les liſant d'un eſprit libre & ſatisfait, s'attacher déſormais uniquement à en prendre comme on a dit, le corps, l'eſprit, le ſyſtême, le fil de l'invention, & ſe mettre tout-à-fait à leur place, pour porter plus loin l'Ouvrage de la Quadrature, ou en géneral l'édifice de la Géometrie, ſelon la deviſe du Géometre Flamand, *Plus ultrà.*

## *APPROBATION.*

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, un manuſcrit intitulé : *Suite de l'Analyſe des Infiniment Petits, de M. le Marquis de l'Hôpital.* Comme nous n'avons en François que très-peu d'Ouvrages ſur le Calcul Integral, & qu'on trouvera dans celui-ci les premiers Elemens de ce calcul, expliqués avec beaucoup de clarté : j'ai crû que l'impreſſion en ſeroit très-utile. Fait à Paris, ce 24 Mars 1733.

PITOT.

## *PRIVILEGE DU ROY.*

LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : à nos amez & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; Salut. Notre bien amé PIERRE-FRANÇOIS GIFFART, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui auroit été mis en main *une ſuite de l'Analyſe des Infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital, Ouvrage ſuppléé par le ſieur Stone, traduit de l'Anglois*, qu'il ſouhaiteroit faire imprimer & donner au Public, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege, ſur ce neceſſaires ; offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & en beaux caracteres, ſuivant la feuille imprimée & attachée pour modele ſous le contre-ſcel des Préſentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Expoſant : Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer ledit Livre ci-deſſus ſpecifié, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon lui ſemblera, ſur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée ſous notredit contreſcel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes ; Faiſons défenſes à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance : comme auſſi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Livre ci-deſſus expoſé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits ſous

quelque prétexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion de ce Livre ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que l'Impetrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725; & qu'avant que de l'expoſer en vente, le Manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Livre, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin, le tout à peine de nullité des Préſentes; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes ayans-cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie deſdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secretaires: foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'éxecution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Hato, Charte Normande & Lettres à contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le deuxiéme jour de Mai l'an de grace mil ſept cens trente-trois, & de notre Regne le dix-huitiéme. Par le Roi, en ſon Conſeil. SAINSON.

*Regiſtré ſur le Regiſtre VIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 540. fol. 336 conformément aux anciens Reglemens confirmez par celui du 28 Février 1723. A Paris le 20 Mai 1733.*

G. MARTIN, *Syndic.*

# TABLE
## DES SECTIONS
### Contenuës dans ce Traité.

SECTION I. *Maniere de reduire les fractions & les quantités ſourdes en ſeries infinies*, page 1

SECTION II. *Trouver les Integrales d'une expreſſion differentielle donnée*, page 18

SECTION III. *Uſage de la méthode des Integrales pour la quadrature des eſpaces Curvilignes*, page 38

SECTION IV. *Uſage du Calcul Integral pour trouver la rectification des Courbes*, page 72

SECTION V. *Uſage du Calcul Integral dans la Cubation des ſolides, & dans la quadrature de leurs ſurfaces*, page 92

SECTION VI. *Uſage du Calcul Differentiel & Integral, pour trouver le centre de gravité des figures*, page 109

SECTION VII. *Uſage du Calcul Differentiel & Integral*,

Digitized by Google

*dans la recherche des Centres de percuſſion des figures*, page 131

SECTION VIII. *Réſolution de divers Problêmes par le Calcul Differentiel & Integral*, page 139

Fin de la Table des Sections.

SUITE

# SUITE
## DE
# L'ANALISE
## DES
# INFINIMENT PETITS:
## *COMPRENANT*
## LE CALCUL INTEGRAL.

---

### SECTION PREMIERE.

*La maniere de réduire les fractions & les quantités ſourdes en ſeries infinies.*

ON ne peut trouver les integrales exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes, qu'en faiſant diſparoître dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical, ce qui ſe fait par le moyen d'une ſerie infinie, comme on va l'expliquer dans les deux Problêmes ſuivans.

## PROBLEME PREMIER.

*Transformer* $\frac{b}{a+x}$, *où* a *&* b *ſont des quantités connuës & x inconnuë, en une ſerie infinie pour la dégager de ſon dénominateur binome.*

1. IL faut diviſer *b* numerateur de la fraction par le denominateur $a+x$, ainſi qu'on en uſe dans les fractions decimales, en ajoûtant *o*, à ce qui reſte & continuant cette operation juſqu'à ce que le quotient ait 4, 5 ou 6 termes. Alors vous en pourrez preſque toujours trouver autant qu'il vous plaira en conſiderant la ſuite progreſſive de ce quotient, & ce nombre infini ou ſerie de termes que vous aurez trouvés ſera le quotient de la diviſion; mais ordinairement un petit nombre de premiers termes ſuffiſent pour approcher auſſi exactement qu'il eſt neceſſaire.

EXEMPLE PREMIER.

$$a+x)\ b+o\ \left(\frac{b}{a}-\frac{bx}{a^2}+\frac{bx^2}{a^3}-\frac{bx^3}{a^4}\ \&c.\right.$$

$$b+\frac{bx}{a}$$

$$o-\frac{bx}{a}+o$$

$$-\frac{bx}{a}-\frac{bx^2}{a^2}$$

$$o+\frac{bx^2}{a^2}+o$$

$$+\frac{bx^2}{a^2}+\frac{bx^3}{a^3}$$

$$o-\frac{bx^3}{a^3}+o$$

$$-\frac{bx^3}{a^3}-\frac{bx^4}{a^4}$$

$$o+\frac{bx^4}{a^4}\ \&c.$$

Car diviſant *b* par *a* le quotient eſt $\frac{b}{a}$, multipliant $\frac{b}{a}$ par $a+x$ le produit eſt $\frac{ba}{a}+\frac{bx}{a}=b+\frac{bx}{a}$ qu'il faut ôter du diviſeur *b*, le reſte eſt $o-\frac{bx}{a}$ qu'il faut diviſer encore par *a*

le quotient ſera $-\frac{bx}{a^2}$. Ainſi le produit de $a+x$ par $-\frac{bx}{a^2}$ ſera $-\frac{abx}{a^2}-\frac{bx^2}{a^2}$ ou $-\frac{bx}{a}-\frac{bx^2}{a^2}$ qui étant ſouſtrait du dividende $-\frac{bx}{a}$ donnera $o+\frac{bx^2}{a^2}$ d'où on voit la ſuite de la diviſion. Car le quotient conſiſte dans une ſuite infinie de termes dont les numérateurs ſont les puiſſances de $x$, ayant pour expoſans le nombre des termes moins l'unité & les dénominateurs ſont les puiſſances de $a$ dont les expoſans ſuivent l'ordre des termes. Par exemple : dans le troiſiéme terme, l'expoſant de la puiſſance de $x$ dans le numerateur eſt 2, & celui de $a$ au dénominateur eſt 3.

Si vous mettez la lettre $x$, la premiere dans le diviſeur, alors diviſant $b$ par $x+a$, comme ci-devant, le quotient ſera $\frac{b}{x}-\frac{ba}{x^2}+\frac{ba^2}{x^3}-\frac{ba^3}{a^4}$ &c. enſorte qu'on pourra former autant de ſeries par la diviſion, qu'il y a de termes dans le diviſeur ; mais il faut placer les plus forts termes les premiers dans le diviſeur & dans le dividende ſi vous voulez former une véritable ſerie.

Par exemple ſi $b=1$, $x=1$, & $a=2$ en ſupoſant $a$ pour la premiere lettre du diviſeur, vous aurez $\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ &c. ce que nous connoiſſons être vrai d'ailleurs.

Mais ſi c'étoit $x$ qui fût la premiere lettre du diviſeur, alors $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}=1-2+4-8+16$ &c. ce qui eſt faux ; car cette ſerie diverge & differe autant du vrai quotient que le nombre des termes en eſt plus grand ; par exemple le premier terme 1 excede $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$ ; deux termes ſont ſurpaſſés de $\frac{4}{3}$ ; trois termes excedent de $\frac{9}{3}$ quatre termes ſont ſurpaſſés de $\frac{15}{3}$, ainſi des autres.

## Exemple II.

$$b+x)\,aa+0\,(\,\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b}\\
\hline
0-\frac{aax}{b}+0\\
\quad -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}\\
\hline
0+\frac{aax^2}{b^2}+0\\
\quad +\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}\\
\hline
0-\frac{aax^3}{b^3}+0\\
\quad -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}\\
\hline
0+\frac{aax^4}{b^4}\ \&c.
\end{array}$$

Si vous mettez $x$ pour le premier terme, alors le quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$ &c. De même le quotient de la fraction $\frac{1}{1+xx}$ sera $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. ou si vous mettez $xx$, pour le premier terme du diviseur, vous aurez $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

De même si de la fraction $\frac{2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$, vous ôtez par la division son dénominateur composé, vous aurez $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

Enfin cette fraction $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{5}{128}a^4x^8\&c.}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8\&c.}$ dont le numerateur & le dénominateur sont des series infinies, peut être réduite en une seule serie, en divisant le numerateur par le dénominateur comme dans les fractions

décimales infinies : ce qui donnera pour quotient

$$1 + \tfrac{1}{2}bx^2 - \tfrac{1}{8}b^2x^4 + \tfrac{5}{16}b^3x^6 - \tfrac{35}{128}b^4x^8 \ \&c.$$

$$+\tfrac{1}{2}a \quad +\tfrac{1}{4}ab^2 \quad +\tfrac{3}{16}ab^2 \quad +\tfrac{5}{32}ab^3$$
$$-\tfrac{1}{8}a^2 \quad -\tfrac{1}{16}a^2b \quad -\tfrac{1}{64}a^2b^2$$
$$+\tfrac{1}{16}a^3 \quad +\tfrac{1}{32}a^3b$$
$$-\tfrac{5}{128}a^4$$

## PROBLEME II.

*Degager une expreſſion complexe comme* $\sqrt{aa+xx}$, *de ſon ſigne radical & la réduire en une ſerie infinie.*

2. EXTRAYEZ la racine comme vous en uſez dans celles des fractions décimales en ajoûtant les chifres & en ôtant autant de termes qu'il eſt néceſſaire pour trouver la ſuite de la progreſſion ; en ſorte que par les termes déja trouvés vous puiſſiez continuer de trouver les autres à volonté.

### EXEMPLE I.

$$aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}, \ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0+xx \\
\quad xx+\frac{x^4}{4a^2} \\
\hline
\quad 0-\frac{x^4}{4a^2} \\
\quad -\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
\quad 0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6} \\
\quad +\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
\quad 0-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}, \ \&c.
\end{array}$$

Car tirant la racine de $aa$, il vient $+a$ pour le premier terme de la racine ; enſuite après l'avoir quarré, ſouſtrayez-le de $aa+xx$ reſte $xx$ lequel étant diviſé par $2a$, comme

dans l'extraction de la racine quarrée, le quotient ſera $+\frac{x^3}{2a}$ pour le ſecond terme de la racine, qui étant ajoûté à $2a$, & le tout multiplié par $\frac{x^3}{2a}$ donnera $xx+\frac{x^4}{4a^2}$ lequel ſouſtrait d'$xx$, il reſtera $-\frac{x^4}{4a^2}$ qui étant diviſé par $2a+\frac{x^2}{a}$ double des deux premiers termes, donnera pour le troiſiéme terme du quotient $-\frac{x^4}{8a^3}$ qui étant ajoûté à $2a-\frac{x^2}{a}$ & le tout multiplié par $-\frac{x^4}{8a^3}$ produira $-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}$ lequel ſouſtrait de $-\frac{x^4}{4a^2}$ le reſte ſera $0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$ & en continuant ainſi vous pouvez trouver autant de termes qu'il vous plaira.

Si $xx$ eſt le premier terme de la ſerie, alors la racine ſera $x+\frac{aa}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}-\frac{5a^8}{128x^7}$, &c.

Ici, auſſi-bien que dans la diviſion précedente, le plus grand terme de la ſerie doit être le premier, autrement la racine ou ſerie ſeroit fauſſe.

## EXEMPLE II.

$x-xx\,(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

$x$

$0-x^2$

$-x^2+\frac{1}{4}x^3$

$0-\frac{1}{4}x^3$

$-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{64}x^5$

$0-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{64}x^5$

$-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^5+\frac{1}{64}x^6+\frac{1}{256}x^7$

$0-\frac{5}{64}x^5-\frac{1}{64}x^6-\frac{1}{256}x^7$

$-\frac{5}{64}x^5+\frac{5}{128}x^6+\frac{5}{512}x^7+\frac{5}{1024}x^8+\frac{5}{16384}x^9$

$0-\frac{7}{128}x^6-\frac{7}{512}x^7-\frac{5}{1024}x^8-\frac{5}{16384}x^9$

&c.

EXEMPLE III.

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4\ \&c.\ (1-x+x^2\ \&c.$$

$$1$$

$$0-2x+3x^2-4x^3+5x^4\ \&c.$$

$$-2x+x^2$$

$$0+2x^2-4x^3+5x^4\ \&c.$$

$$2x^2-2x^3+x^4$$

$$0-2x^3-4x^4\ \&c.$$

On peut de la même maniere extraire la racine cubique, quarrée quarrée *&c.* d'une quantité ſourde, quand bien même elle ſeroit une ſerie infinie.

Mais on peut abreger ces extractions auſſi-bien que les diviſions précedentes, par le theoreme de M. le Chevalier Newton dont voici la formule $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$

Ou $P+PQ$ repreſente une quantité quelconque dont il faut chercher la racine ou toute autre dimenſion, qui ſe trouve transformée en une ſerie infinie. P, eſt le premier terme de la quantité: $Q$, eſt le reſte des termes, diviſé par le premier; & $\frac{m}{n}$ eſt l'expoſant numerique de la puiſſance de $P+PQ$. Ordinairement $A, B, C, D$, *&c.* ſont employés pour ſignifier les termes trouvés au quotient; *Par exemple*, $A$, pour le premier terme $P^{\frac{m}{n}}$; $B$ pour le ſecond $\frac{m}{n}AQ$, ainſi des autres.

Quelques exemples donneront l'uſage de ce merveilleux theoreme.

EXEMPLE I.

$\sqrt{aa+xx}$ ou $\overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt $= a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, *&c.*

Car dans ce cas $P = aa$, $Q = \frac{xx}{aa}$, $m = 1$, $n = 2$, $A$

$(=P^{\frac{m}{n}} = aa^{\frac{1}{2}}) = A.B(=\frac{m}{n}AQ) = \frac{xx}{2a}.C(=\frac{m-n}{2n}BQ)$
$= -\frac{x^4}{8a^3}$, &c.

## Exemple II.

$\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5}$ ou $\overline{a^5 + a^4x - x^5}^{\frac{1}{5}} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^8xx + 4a^3x^6 - 2x^{10}}{25a^9} +$ &c. dans ce cas $m = 1$, $n = 5$, $P = a^5$, & $Q = \frac{a^4x - x^5}{a^5}$.

## Exemple III.

$\frac{b}{\sqrt[2]{y^3 - a^2y}}$ ou $b \times \overline{y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{2}} = b \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7}$, &c. en ce cas $P = y^3$, $Q = -\frac{aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$, $A(P^{\frac{m}{n}} = y^3 \times -\frac{1}{3}) = y^{-1}, = \frac{1}{y}$. $B\left(\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times -\frac{aa}{yy}\right) = \frac{aa}{3y^3}$, &c.

## Exemple IV.

$\sqrt[3]{a + x^4}$ ou $\overline{a + x^4}^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} + \frac{4xa}{3}^{\frac{1}{3}} + \frac{2xx}{9a^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x^3}{81a^{\frac{5}{3}}} +$ &c.

en ce cas $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = 4$, $n = 3$, $A\ (= P^{\frac{m}{n}}) = a^{\frac{4}{3}}$, &c.

## Exemple V.

$\overline{a + x}^5$ ou $\overline{a + x}^{\frac{5}{1}} = a^5 + 5a^4x + 10a^3x\,x + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$. En ce cas $P = a$. $Q = \frac{x}{a}$. $m = 5$, $n = 1$. $A(= P^{\frac{m}{n}}) = a^5$ $B(= \frac{m}{n}AQ) = 5a^4x$. de même $C = 10a^3xx$. $D = 10aax^3$. $E = 5ax^4$. $F = x^5$ & $G\ (= \frac{m-5n}{6n}FQ) = 0$

Exemple

EXEMPLE VI.

$\frac{1}{a+x}$ ou $\overline{a+x}^{-1}$ ou $\overline{a+x}^{-\frac{1}{1}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{aa} + \frac{xx}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$, &c.

En ce cas $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = -1$, $n = 1$, & $A$ $(= P^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{1}{1}}) = a^{-1} = \frac{1}{a}$. $B$ $(= \frac{m}{n} A Q = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{x}{a}) = -\frac{x}{aa}$. Et $C = \frac{xx}{a^3}$. $D = -\frac{x^3}{a^4}$, &c. De ſorte que par ce merveilleux theoreme on dégage les fractions de leurs dénominateurs, en même tems qu'on extrait leurs racines.

EXEMPLE VII.

$\frac{3}{a+x} = 3 \times \overline{a+x}^{-1} = 3 \times \frac{1}{a^1} - \frac{3x}{a^2} + \frac{6xx}{a^3} - \frac{10x^3}{a^4}$, &c.

EXEMPLE VIII.

$\frac{b}{\sqrt[3]{a+x}} = b \times \overline{a+x}^{-\frac{1}{3}} = b \times \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{x}{3a^{\frac{4}{3}}} + \frac{2xx}{9a^{\frac{7}{3}}} - \frac{14x^3}{81a^{\frac{10}{3}}}$, &c.

EXEMPLE IX.

$\frac{b}{\sqrt[5]{a+x^3}} = b \times \overline{a+x^3}^{\frac{3}{5}} = b \times \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3x}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12xx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52x^3}{125a^{\frac{18}{5}}}$, &c.

M. de Moivre nous a donné dans les *Tranſactions Philoſophiques* * le theoreme ſuivant, ſoit pour élever une ſerie infinie à la puiſſance donnée $m$, ſoit pour en extraire la racine. Par exemple, $\overline{az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + fz^6 \&c.}^{m}$ eſt $=$

* n°. 230.

$$= a^m z^m +$$

$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b z^{m+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}b^2 \\ \quad +\frac{m}{1}\,a^{m-1}c \end{array}\right\} z^{m+2}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\,a^{m-3}b^3 \\ +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}\,bc \\ \quad +\frac{m}{1}a^{m-1}\,\mathrm{d} \end{array}\right\} z^{m+3}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\,a^{m-4}b^4 \\ \quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^2c \\ \quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}b\,\mathrm{d} \\ \quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}c^2 \\ \quad\quad\quad +\frac{m}{1}\,a^{m-1}e \end{array}\right\} z^{m+4}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}\,a^{m-5}b^5 \\ \quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{1}\,a^{m-4}b^3c \\ \quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^2\mathrm{d} \\ \quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\times\frac{m-2}{2}\,a^{m-3}bc^2 \\ \quad\quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}be \\ \quad\quad\quad +\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}c\mathrm{d} \\ \quad\quad\quad\quad +\frac{m}{1}\,a^{m-1}f \end{array}\right\} z^{m+5}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}\times\frac{m-5}{6}\,a^{m-6}b^{6}\\
&\quad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{1}\,a^{m-5}b^{4}c\\
&\qquad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{1}\,a^{m-4}b^{3}\mathrm{d}\\
&\qquad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\times\frac{m-3}{2}\,a^{m-4}b^{2}c^{2}\\
&\qquad\quad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^{2}e\\
&\qquad\quad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}bc\,\mathrm{d}\\
&\qquad\qquad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-3}bf\\
&\qquad\quad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\,a^{m-3}c^{3}\\
&\qquad\qquad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}ce\\
&\qquad\qquad+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}\mathrm{d}^{2}\\
&\qquad\qquad\quad+\frac{m}{1}\,a^{m-1}g
\end{aligned}
\right\}\ z^{m+6},\ \&c.
$$

Il eſt abſolument neceſſaire, pour entendre ce theoreme, d'obſerver tous les termes qui multiplient la même puiſſance de $z$ : pour cet effet on doit conſiderer dans chacun de ces termes deux choſes ; 1°, le produit des puiſſances quelconques des quantités ou coefficients donnés $a$, $b$, $c$, d, &c. 2°, le produit de $\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}$, &c. qui eſt mis devant les termes.

Maintenant pour trouver tous les produits qui appartiennent à la même puiſſance $z$ ; par exemple, pour trouver le produit dont l'expoſant eſt $m+r$, ( $r$ étant un nombre entier quelconque ) ces produits doivent être diſtingués en pluſieurs claſſes. Ces produits, après une certaine puiſſance $a$, par laquelle ils commencent, ſont ceux de la premiere claſſe ;

comme $a^{m-1}bbe$ eſt un produit de la premiere claſſe, parce que $b$ ſuit immédiatement $a^{m-}$. Ceux qui ont $c$ immédiatement après une puiſſance d'$a$ ſont les produits de la ſeconde claſſe; ainſi $a^{m-1}cc$ d, eſt le produit de la ſeconde claſſe. Ceux qui donnent d, immédiatement après une certaine puiſſance d'$a$, ſont les produits de la troiſiéme claſſe; ainſi du reſte.

Ceci bien entendu; 1°. Multipliez par $b$ tous les produits qui appartiennent à $z^{m+r-1}$, qui precede immédiatement $z^{m+r}$, & diviſez le tout par $a$. 2°. Multipliez par $c$, & diviſez par $a$, tous les produits qui appartiennent à $z^{m+r-2}$, excepté ceux de la premiere claſſe. 3°. Multipliez par d, & diviſez par $a$, tous les produits appartenans à $z^{m+r-3}$, excepté ceux de la premiere & de la ſeconde claſſe. 4°. Multipliez par $e$, & diviſez pat $a$, tous les termes appartenans à $z^{m+r-4}$, excepté ceux de la premiere, ſeconde & troiſiéme claſſe, continuant ainſi juſqu'à ce qu'on ait trouvé deux fois le même terme. Enfin ajoutez à tous ces termes le produit de $a^{m-1}$ par la lettre dont l'expoſant eſt $r+1$.

*Nota.* L'expoſant d'une lettre eſt le nombre qui exprime la place qu'elle occupe dans l'alphabet, comme 3 eſt l'expoſant de la lettre $c$.

Il eſt clair qu'on peut facilement trouver par cette méthode tous les produits appartenans à la ſeconde puiſſance de $z$, ſi vous mettez le produit appartenant à $z^m$ comme $a^m$.

Maintenant pour trouver le produit (*a*) mis devant les termes, conſiderez la ſomme de toutes les unités qui ſont contenuës dans l'expoſant des lettres qui les compoſent dont il faut excepter l'expoſant d'$a$; pour lors écrivez autant de termes de la ſerie $m \times m-1 \times m-2$ &c. qu'il y a d'unités dans la ſomme des expoſans; cette ſerie ſera le numerateur d'une fraction dont le dénominateur ſera le produit de ces diverſes ſeries $1\times2\times3\times4\times5$ *&c.* $1\times2\times3\times4\times5$ *&c.* $1\times2\times3\times4\times5\times6$ *&c.* dont la premiere contient autant de termes qu'il y a d'unités dans l'expoſant de $b$, la ſeconde autant qu'il y en a dans l'expoſant de $c$, la troiſiéme dans d, &c.

Vous pouvez en voir la démonſtration dans les tranſactions ci-deſſus citées. Un ou deux exemples donneront l'uſage de ce theoreme.

(*a*) $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, *&c.*

### EXEMPLE I.

Pour élever à la seconde puissance ou au quarré cette serie infinie $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$, &c.

En supposant dans ce theoreme $m=2$, $z=x$, $a=\frac{1}{xx}$, $b=\frac{1}{x^3}$, $c=\frac{1}{x^4}$, $d=\frac{1}{x^5}$, &c. donc $\overline{\frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\ \&c.}^{2}$ ou $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$, &c. pour le premier terme $a^m z^m$ $(= \frac{1}{x^4} \times x\,x) = \frac{1}{xx}$. Le second terme $\frac{m}{1}\, a^{m-1}\, b\, z^{m+1}$ $(= \frac{2}{xx} \times \frac{1}{x^3} \times x^3) = \frac{2}{x^3}$

Le troisiéme $\left.\begin{array}{l} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}\, a^{m-2} b^2 \\ + \frac{m}{1}\, a^{m-1} c \end{array}\right\} z^{m+2} \left\{ = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} \times x^4 \right.$

$= \frac{1}{x^4} + 2 \times \frac{1}{xx} \times \frac{1}{x^3} \times x^4 = \frac{2}{x^4} \Big\} = \frac{3}{x^4}$

Le quatriéme $\left.\begin{array}{l} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}\, a^{m-3} b^3 \\ \frac{m}{1} + \frac{m-1}{1}\, a^{m-2} bc \\ \frac{m}{1}\, a^{m-1} d \end{array}\right\} z^{m+3} = \left\{ \right.$

$\left.\begin{array}{r} 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{3} \times xx \times \frac{1}{x^{12}} \times x^5 = 0 \\ 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^5} \times x^5 = \frac{2}{x^3} \\ 2 \times \frac{1}{xx} \times \frac{1}{x^3} \times x^5 = \frac{2}{x^5} \end{array}\right\} = \frac{4}{x^5}$

### EXEMPLE II.

Pour quarrer cette serie infinie $1 - x + x^2 - x^3 +$ &c. su-

posant dans ce theoreme $m=2$, $z=x$. $a=\frac{1}{x}-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$, &c. ainsi $\overline{1-x+x^2-x+x^4}^{2}$. &c. sera $=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4$ &c. Car $a^m z^m$ $(=\overline{\frac{1}{x}-1}^{2}\times x^2.)$ $=1-2x+xx$. $\frac{m}{1}\,a^{m-1}bz^{m+1}$ $(=\frac{2}{1}\times\frac{1}{x}\times -x^3)=2xx-2x^3$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}b^2\\ \qquad\frac{m}{1}\,a^{m-1}c\end{array}\right\}z^{m+1}=\left\{\begin{array}{l}\overline{\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-1\times 1\times x^4}^{2-2}\\ \overline{\frac{2}{1}\times\frac{1}{x}-1\times -1\times x^4}^{1}\end{array}\right\}=-x^3+2x^4,\ \&c.$$

## EXEMPLE III.

Pour élever $1-x+x^2-x^3+x^4$, &c. à la troiſiéme puiſſance ou au cube.

Supoſez $m=3$. $z=x$. $a=\frac{1}{x}-1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$. Alors la troiſiéme puiſſance donnera $1-3x+3x^2-2x^3-6x^4$, &c. Car $a^m z^m$ $(=\overline{\frac{1}{x}-1\times x^3}^{3})=1-3x+3\,xx-x^3$.

$\frac{m}{1}\,a^{m-1}bz^{m+1}$ $(=3\times\frac{1}{x}-1\times 0\times x^4)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}b^2\\ \qquad\frac{m}{1}\,a^{m-1}c\end{array}\right\}z^{m+1}=\left\{\begin{array}{l}\overline{3\times 1\times\frac{1}{x}-1\times 0^2\times x^5=0}^{1}\\ \overline{3\times\frac{1}{x}-1\times 1\times x^5=3x^3-6x^4\times 3x^5}^{2}\end{array}\right\}=$$

$3x^3-6x^4+3x^5$

Et parce que $b$ & $d = o$. Ainſi le ſecond terme du theoreme general ſera $= o$. On peut continuer ainſi, *&c.*

## EXEMPLE IV.

Pour extraire la racine d'une ſerie infinie, où on ſupoſe $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$, *&c.*

Pour trouver la valeur d'$x$ en une ſerie compoſée d'un nombre infini de termes affectés de $z$, & delivrés d'$x$.

D'abord on ſupoſe $x = fz + hz^2 + Kz^3 + lz^4 + mz^5 + nz^6$ *&c.* maintenant par le theoreme $x^2 = f^2z^2 + 2fhz^3 + h^2z^4 + 2hkz^5 + k^2z^6 + 2fkz^4 + 2flz^5 + 2hlz^6 + 2fmz^6$ *&c.*

$x^3 = f^3z^3 + 3f^2hz^4 + 3fh^2z^5 + h^3z^6$, *&c.* $+ 3f^2kz^5 + 3f^2lz^6 + 6fhkz^6$

$x^4 = f^4z^4 + 4f^3hz^5 + 6f^2h^2z^6$, *&c.*

$x^5 = f^5z^5 + 5f^4hz^6$

$x^6 = f^6z^6$, *&c.*

Maintenant ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $o = -z + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$, *&c.* on trouve par-là $-z = -z$

$+ ax = + afz + ahz^2 + akz^3 + alz^4 + amz^5 + anz^6$, *&c.*

$+ bx^2 = * bf^2z^2 + 2bfhz^3 + bh^2z^4 + 2bflz^5 + bk^2z^6 + 2bhkz^4 + 2bhkz^5 + 2bfmz^6$

$+ cx^3 = * * + cf^3z^3 + 3cf^2hz^4 + cfh^2z^5 + 3cf^2lz^6 + 3cf^2kz^5 +$ *&c.* $3cf^2lz^6 + 6fhkz^6$

$dx^4 = * * * + df z^4 + 4df^3z^5 + 6df^2h^2z^6 + 4df^3kz^6$

$ex^5 = * * * * + ef^5z^5 + 5ef^4hz^6$

Maintenant ſi vous ſupoſez égale à $o$, la ſomme de tous les coefficiens des termes de cette équation, vous trouverez les valeurs des coefficiens $f, h, k, l, m, n$, de cette maniere. La ſomme des coefficiens du premier terme $\overset{1}{\underset{af}{\}}} z$ ſera $af - 1$.

dans lequel si $af-1=0$, alors $f=\frac{1}{a}$. Ainsi la somme des coefficiens du second terme $\left.\begin{matrix}ab\\bf^2\end{matrix}\right\}z^2$ sera $ah+f^2$. Or $ah+bf^2=0$, donc $h=\frac{-bf^2}{a}=\frac{-b}{a^3}$. de la même maniere celle du coefficient du troisiéme terme étant égal à 0, $ak+2bfh+cf^3=0$, donc $k=\frac{-2bfb-cf^3}{a}=\frac{2b^2-ac}{a^5}$, de même $al+bh+2bfk+3cf^2h+df^4=0$, donne $l=\frac{-bh-2bfk+3cfb-df^4}{a}=\frac{-b^3}{a^7-4b^3}+\frac{a^2+2ba}{a^5+3bc}+\frac{a^2-d}{a^3}=\frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}$, de la même maniere $m=\frac{14b^4+6abd-21ab^2c+3a^2c^2-a^2e}{a^9}$, & $n=\frac{-42b^5+84ab^3c-28a^2bc-28a^2bd+7a^2cd+7a^2cd+7a^2bea^4f}{a^{11}}$.

Enfin substituant toujours les valeurs des coefficiens $f$, $h$, $k$, $l$, $m$, $n$, dans l'équation proposée $x=fz+hz^2+kz^3+lz^4+mz^5+nz^6$, *&c.* La racine cherchée sera $x=\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}z^4+\frac{14b^4+6a^2bd-21ab^2c+3a^2c^2-a^2e}{a^9}z^5$ *&c.*

*Nota.* S'il y a quelques termes de moins dans l'équation proposée, il est évident que ces termes manqueront également dans la racine; par exemple, si $z=ax+cx^3+ex^5$, *&c.* alors $x=\frac{z}{a}-\frac{ac}{a^5}z^3+\frac{3a^2c^2-a^2e}{a^9}z^5$, *&c.* Mais si $z=ax+bx^2+cx^5+dx^7+ex^9$, *&c.* Alors il arrivera le contraire; car $x=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^4}z^3+\frac{3bb-ac}{a^7}z^5+\frac{8abc-aad-12b^3}{a^{10}}z^7+\frac{55b^4-55abbc+10aabd+5aacc-a^2e}{a^{13}}z^9$, *&c.*

SCHOLIE.

## SCHOLIE.

3. Ces deux expreſſions de la racine d'$x$ ainſi trouvées, ſerviront de regle, pour trouver par ſubſtitution la racine d'une équation infinie propoſée.

Par exemple, ſi on veut extraire la racine de cette équation $z = x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, *&c.* Il n'y a qu'à ſubſtituer dans la premiere équation 1 pour $a$, $-\frac{1}{2}$ pour $b$, $\frac{1}{3}$ à la place de $c$, $-\frac{1}{4}$ pour d, & $\frac{1}{5}$ pour $e$; vous aurez $x = z + \frac{1}{2}zz - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$, *&c.* obſervant que la racine de cette équation $z = x - \frac{x^3}{3r} + \frac{x^5}{5r^4} - \frac{x^7}{7r^6} + \frac{x^9}{9r^8}$ *&c.* eſt $x = z + \frac{z^3}{3r^2} + \frac{2z^5}{15r^4} + \frac{17z^7}{315r^6} + \frac{62z^9}{2835r^8}$, *&c.* en mettant dans l'expreſſion 1 pour $a$, $-\frac{2}{3r}$ pour $b$, $\frac{1}{3r^4}$ pour $c$, $-\frac{1}{7r^6}$ pour d, & $\frac{1}{9r^7}$ pour $e$, &c.

## SECTION II.

*Trouver les integrales d'une expreſſion differentielle donnée.*

### DEFINITION.

L'Integrale d'une expreſſion differentielle donnée, eſt la quantité dont la differentielle eſt l'élement. Comme l'integrale de $dx$ eſt $x$; celle de $dx + dy$, eſt $x + y$: l'integrale de $x\,dy + y\,dx$, eſt $xy$: celle de $mx^{m-1}dx$, eſt $x^m$: celle de $ax^{\frac{m}{n}}dx$, eſt $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$.

### COROLLAIRE I.

*Fig. 1.* 4. Si l'ordonnée $PM$, ($y$) d'une courbe, ou ligne droite, $AM$, coupant à angles droits l'aſciſſe $AP$ ($x$), eſt multipliée par $Pp$ ($dx$), qui repreſente une differentielle quelconque; alors l'aire $APM$ ſera l'integrale de cette differentielle; & au contraire, le rectangle formé par l'ordonnée $PM$, multipliée par $dx$, difference de $AP$, ſera la differentielle de l'eſpace $APM$. Car ce rectangle peut être pris pour le trapeze $PMmp$, qui eſt la differentielle réelle de cette aire: leur difference étant ſeulement le petit triangle $Mmn$, qui eſt infiniment plus petit que $PMmp$; donc il peut être négligé, *ſuivant l'axiome premier, partie premiere.*

### COROLLAIRE II.

5. D'où il eſt évident que la méthode inverſe des fluxions, ou la méthode des integrations, revient à celle de trouver la ſomme d'une ſerie.

SCHOLIE.

6. Nous devons obſerver ici qu'une integrale ne peut avoir qu'une difference, mais qu'au contraire une difference peut avoir nne infinité d'integrales. Par exemple, l'integrale $a\,x$ ne peut avoir que cette ſeule differentielle $a\,dx$: mais la differentielle $a\,dx$ peut avoir une infinité d'integrales; car ſi on ſupoſe $b, c, d, f, g$, &c. des quantités conſtantes, alors $a\,x \pm b$, $a\,x \pm c$, $a\,x \pm f$, $a\,x \pm g$, &c. ou $a\,x \pm$ une infinité d'autres quantités conſtantes, donnera pour integrale non pas ſeulement $a\,x$, mais $a\,x \pm p$; or $p$ eſt une quantité donnée quelconque qui peut repreſenter une expreſſion compoſée de quantités conſtantes. Il faut entendre la même choſe dans toutes les autres expreſſions differentielles & integrales.

Comme il eſt aiſé d'élever une quantité à une puiſſance donnée quelconque, & qu'on n'en peut pas au contraire trouver en termes finis la racine quelconque; de même dans les differentielles il eſt facile de trouver les differences d'une quantité quelconque variable, ou compoſée de variables & de conſtantes; mais au contraire on ne peut trouver que rarement en termes finis l'integrale d'une difference quelconque; ainſi comme dans l'algebre nous avons recours aux aproximations pour les racines ſourdes qui ne peuvent pas être exactement exprimées; de même dans les integrales nous nous ſervons de ſeries infinies, lorſque nous ne pouvons pas les trouver exactement.

## PROBLEME PREMIER.

7. *Trouver l'integrale d'une expreſſion differentielle donnée.*

*Premier cas.* 1°. QUand les expreſſions differentielles ne ſont point mêlées de quantités conſtantes, mais ſont les produits des integrales multipliées par les differences, ce qu'on doit entendre de toutes grandeurs variables, comme dans cette expreſſion $x\,dy + y\,dx$, ou $x\,y\,dz + z\,x\,dy + z\,y\,dx$; pour lors ſuivant la regle on trouvera les integrales par le revers de l'operation directe; par exemple:

*Au lieu de chaque differentielle ſubſtituez ſa quantité variable ; ajoutez enſemble tous les termes, & diviſez la ſomme par le nombre des termes.*

Ainſi l'integrale de $x\,dy + y\,dx$, eſt $xy$, celle de $xy\,dz + z\,xdy + y\,z\,dx$, eſt $xyz$.

2. Quand une expreſſion differentielle ſe trouve mêlée avec une puiſſance quelconque ; par exemple, $2\,x\,dy$, ou $3\,x^2\,dx$, ou $m\,x^{m-1}\,dx$, ou $\frac{n}{m}\,x^{\frac{n-m}{m}}\,dx$, ou $a\,x^{\frac{m}{n}}\,dx$, qui eſt l'expreſſion la plus generale pour le cas dont il s'agit ; alors l'integrale ſe trouvera par le revers de l'operation directe & ordinaire. Car dans l'operation ordinaire on trouve la differentielle quelconque d'une grandeur, en diminuant l'expoſant d'une unité, en mettant la caracteriſtique $dx$, & multipliant le tout par l'expoſant de la puiſſance de la quantité variable. Pour trouver donc l'integrale d'une differentielle, il n'y a qu'à faire le contraire, en ajoûtant une unité à l'expoſant de la quantité variable, en retranchant la caracteriſtique $dx$, & diviſant le tout par l'expoſant ainſi augmenté de l'unité. On en uſera de même dans tous les cas ſemblables : voici la regle.

*Retranchez la differentielle, ajoûtez l'unité à l'expoſant de la quantité variable, & diviſez par l'expoſant ainſi augmenté de l'unité.*

Ainſi l'integrale de $2\,x\,dx$ ou $2\,x^1\,dx$, ſera $x^2$ ; car retranchant $dx$, on aura $2\,x^1$, ajoûtant 1, à l'expoſant, viendra $2\,x^{1+1} = 2x^2$ ; diviſant par 2, on aura $\frac{2x^2}{2} = x^2$ integrale de $2\,x\,dx$. De la même maniere l'integrale de $3\,x^2\,dx$ ſera $x^3$ ; celle de $mx^{m-1}\,dx$, ſera $x^m$ ; celle de $\frac{n}{m}\,x^{\frac{n-m}{m}}\,dx$, ſera $x^{\frac{n}{m}}$ ; celle de $-n\,x^{-n-1}\,dx$, ſera $x^{-n}$ ou $\frac{1}{x^n}$ ; celle de $a\,x^{\frac{m}{n}}\,dx$, ſera $\frac{an}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}$ : Car dans ce dernier cas ſi on ajoûte 1 à $\frac{m}{n}$ expoſant de la puiſſance de la quantité variable, & ſi on retranche la differentielle $dx$, on aura

$a x^{\frac{m+n}{n}}$ qui, diviſé par $m+n$, nouveau expoſant, le quotient $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ ſera l'integrale de la differentielle $a x^{\frac{m}{n}} dx$.

*Autrement.*

La derniere differentielle & ſon integrale étant plus generales qu'aucune de celles que nous avons raportées, elles peuvent ſervir de formules pour trouver les integrales des differentielles ſimples que nous avons déja citées, en leur donnant la même forme & en faiſant les ſubſtitutions convenables; par exemple, pour trouver l'integrale de $x^2 dx$ en lui donnant la même forme qu'à la differentielle $a x^{\frac{m}{n}} dx$, cette differentielle ſe changera en $1 x^{\frac{2}{1}} dx$, ſupoſant $a=1$, $n=1$. $m=2$. En ſubſtituant 1, pour $a$; 1, pour $n$, & 2, pour $m$; dans l'integrale $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alors vous aurez $\frac{1}{3} x^3$, pour l'integrale de $1 x^2 dx$. De même l'integrale de $4\sqrt{x}\, dx = 4 x^{\frac{1}{2}} dx$, eſt $\frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{x^3}$.

L'integrale de $\sqrt[3]{x^5} dx = x^{\frac{5}{3}} dx$, ſera $\frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$.

L'integrale de $\frac{1}{x^2} dx = 1 x^{-2} dx$, ſera $\frac{1}{-1} x^{\frac{-1}{1}} = -x^{-1}$, en ſupoſant dans cet exemple $a=1$, $n=1$, & $m=2$.

L'integrale de $\frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = x^{\frac{-3}{2}} dx$, ſera $\frac{2}{-1} x^{\frac{-1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$

Enfin l'integrale de $\frac{1}{x} dx = 1 x^{\frac{-1}{1}} dx$, ſera $\frac{1}{0} x^{\frac{0}{1}} =$

$\frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} = \infty$. Car ici $a = 1, m = -1$, & $n = 1$.

*Second cas.* Si une expreſſion differentielle conſiſte dans un nombre quelconque de termes ſimples comme ceux *du premier cas*, *n.* 2. alors l'integrale ſera compoſée d'autant de termes joints enſemble par les ſignes + & —, qu'il y a de termes dans l'expreſſion differentielle ; par exemple :

L'integrale de $x^2 dx + x^{\frac{3}{2}} dx$, ou $x^2 + x^{\frac{3}{2}} \times dx$, ſera $\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$. Car, *par le premier cas*, *n.* 2. l'integrale de $x^2 dx$ eſt $\frac{1}{3} x^3$ ; celle de $x^{\frac{3}{2}} dx$, eſt $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$. Par conſequent la ſomme de ces integrales ſera l'integrale de la ſomme de ces differentielles.

De même l'integrale de $x^2 dx - x^{\frac{3}{2}} dx$ ſera $\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$.

Celle de $3 x dx - 2 x^2 dx + x^3 dx - 5 x^4 dx$, ſera $\frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 - x^5$.

Obſervez que celle de $x^{-2} dx + x^{-\frac{3}{2}} dx$, ou de $x^{-2} dx - x^{-\frac{3}{2}} dx$, ſera $-x^{-1} - 2 x^{-\frac{1}{2}}$ ou $-x^{-1} + 2 x^{-\frac{1}{2}}$ ; en changeant les ſignes on aura leurs valeurs affirmatives, ſçavoir $x^{-1} + 2 x^{-\frac{1}{2}}$ ou $x^{-1} - 2 x^{-\frac{1}{2}}$.

Celle de $x^2 dx + x^{-2} dx$, ſera $\frac{1}{3} x^3 - x^{-1}$.

*Troiſiéme cas.* Quand les termes d'une expreſſion diffe-

rentielle ſe trouvent plus compoſés que ceux que nous venons de parcourir, il faut d'abord les reduire à de ſimples termes, en réduiſant l'expreſſion, *comme on a fait dans les cas précedens*, ou une partie en une ſerie infinie, ſuivant les regles de la premiere ſection ; enſuite l'integrale peut aiſément ſe trouver ſuivant les regles déja données ; par exemple, que $\frac{b}{a+x}dx$ ſoit une differentielle ; il faut la réduire en une ſerie infinie, (*premier Probleme, Section premiere.*) on aura $\frac{b}{a}dx - \frac{b}{a^2}xdx + \frac{b}{a^3}x^2dx - \frac{b}{a^4}x^3dx$, &c. dont l'integrale, *ſuivant le ſecond cas*, ſera $\frac{b}{a}x - \frac{b}{2a^2}x^2 + \frac{b}{3a^3}x^3 - \frac{b}{4a^4}x^4$, *&c.*

De même l'integrale de $\frac{1}{1+xx}dx = (*)\ 1dx - x^2dx +$ * art. 1.
$x^4dx - x^6dx$, &c. ſera (*) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, *&c.* * art. 7.

L'integrale de $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x}dx = (*)\ 2x^{\frac{1}{2}}dx - 2xdx$ * art. 1.

$+ 7x^{\frac{3}{2}}dx - 13x^2dx + 34x^{\frac{5}{2}}dx$, *&c.* ſera (*) $\frac{4}{3}$ * art. 7.
$x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$, *&c.*

De même l'integrale de $\sqrt{aa+xx}\times dx = (*)\ adx +$ * art. 2.
$\frac{x^2}{2a}dx - \frac{x^4}{8a^3}dx + \frac{x^6}{16a^5}dx - \frac{5x^8}{128a^7}dx$, ſera (*) $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ * art. 7.
$+ \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$, *&c.*

Celle de $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$, ſera

$$x + \left.\begin{matrix}\frac{1}{6}b\\ +\frac{1}{6}a\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}\frac{3}{40}b^2\\ +\frac{1}{20}ab\\ -\frac{1}{40}a^2\end{matrix}\right\} x^5, \text{ \&c.}$$

On peut trouver par les mêmes regles l'integrale de $\overline{d x^m \times e + f x^n}^{p} \times d x$, où dans cette expreſſion $d$, $e$, $f$, ſont des quantités données ou connuës, & $m$, $n$, $p$, ſont les expoſans des quantités où ils ſont attachés.

Faites $\frac{m+1}{n} = r$, $p + r = s$, $\frac{d}{nf} \times \overline{e + f x^n}^{p+1} = \mathcal{Q}$, & $rn - n = t$ : Alors l'integrale ſera, $\mathcal{Q} \times \frac{x^t}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fx^n} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fx^n} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fx^n} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fx^n}$ &c.

Les lettres $A$, $B$, $C$, $D$, &c. dénotent les termes qui précedent ; par exemple, $A$, le terme $\frac{x^t}{s}$, $B$ le terme $-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fx^n}$, &c. Ces ſeries, quand $r$ eſt une fraction ou un nombre négatif, ne ſont point terminées, c'eſt-à-dire, que l'integrale conſiſte dans une ſerie d'une infinité de termes. Mais quand $r$ eſt une grandeur entiere ou affirmative, pour lors l'integrale ſera compoſée d'un nombre fini de termes ; par exemple, autant qu'il y aura d'unités dans $r$.

### *Autrement.*

Cette derniere differentielle & ſon integrale peuvent ſervir de formule generale pour trouver les integrales de toutes ſortes d'expreſſions differentielles, pourvû qu'elles ſoient binomes : pour cet effet, on n'a qu'à leur donner la même forme qu'à l'expreſſion differentielle, & enſuite les ſubſtituer, comme vous pourrez voir dans les exemples ſuivans.

### Exemple I.

Trouver l'integrale de $\sqrt{a x} \times d x$ ; réduiſez cette expreſſion à la forme ci-devant ; alors $1 x^0 \times \overline{0 + a x^1}^{\frac{1}{2}} d x = D x^m \times \overline{e + f x^n}^{p} d x$, dans laquelle $D = 1$, $m = 0$, $f = a$,

$f=a$, $n=1$, $p=\frac{1}{2}$, $Q=\frac{1}{a}\times ax^{\frac{3}{2}}$, $t=0$, $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$; & en ſubſtituant ces valeurs dans l'integrale generale ci-devant, on aura $\frac{1}{a}\times ax^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{1\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$, pour l'integrale cherchée, & en general l'integrale de $cx^n dx$, eſt $\frac{c}{n+1}x^{n+1}$.

## Exemple II.

$\frac{a^4x}{c^4-2ccxx+x^4}dx$ étant réduite à la forme generale de l'expreſſion differentielle binome, donnera $a^4x\times\overline{cc-xx}^{-2}$, ou $a^4x^{-3}\times\overline{-1+ccx^{-2}}^{-2}=Dx^m\times\overline{e+fx^n}^{p}$. Dans le premier cas $D=a^4$, $m=1$, $e=cc$, $f=-1$, $n=2$, $p=-2$. D'où $r=1$, $s=-1$, $Q=-\frac{a^4}{2}\times\overline{cc-xx}^{-1}$; c'eſt-à-dire, $-\frac{a^4}{2cc-2xx}$, $t=0$. Alors l'integrale eſt $Q\times-\frac{x^0}{1}$, c'eſt-à-dire, $=\frac{a^4}{2cc-2xx}$. Dans le ſecond cas $D=a^4$, $m=-3$, $e=-1$, $f=cc$, $n=-2$, $p=-2$, $r=1$, $s=-1$, $Q=-\frac{a^4}{2cc}\times\overline{-1+ccx^{-2}}^{-1}$; c'eſt-à-dire, $-\frac{-a^4xx}{2c^4-2ccxx}$, $t=0$; & l'integrale ſera $Q\times-\frac{x^0}{1}=\frac{a^4xx}{2c^4-2ccxx}$.

## Exemple III.

$\frac{a^5}{x^4}\sqrt{bx+xx}dx$ réduit à la forme generale, ſera $a^5x^{-\frac{8}{2}}\times\overline{b+x}^{\frac{1}{2}}\times dx$, ou $a^5x^{-4}\times\overline{1+bx^{-1}}^{\frac{1}{2}}\times dx$. Dans le premier cas $D=a^5$, $m=-\frac{8}{2}$, $e=b$, $f=1$, $n=p=\frac{1}{2}$, & de même $r=-\frac{7}{2}$ &c. Maintenant, ſupoſant $r$ négatif, j'eſſaye l'autre cas; alors $D=a^5$, $m=-4$, $e=1$, $f=b$,

$n = -1$, $p = \frac{1}{2}$. De même $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^3}{b} \times \overline{1+bx^{-1}}^{\frac{3}{2}}$ ou $-\frac{a^3x+a^3b}{bxx}\sqrt{xx+bx}$, & $t = -2$ : d'où l'integrale eſt $Q \times \frac{x^{-1}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{x^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{x^0}{3\frac{1}{2}bb}$, c'eſt-à-dire, $-\frac{30bb+24bx-16xx}{105bbxx} \times \frac{a^3x+a^3b}{bxx}\sqrt{xx+bx}$.

## EXEMPLE IV.

$\frac{bx^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{c^3-3acc x^{\frac{2}{3}}+3aac x^{\frac{4}{3}}-a^3xx}}dx$ étant réduit à la forme generale comme ci-deſſus, donnera $bx^{\frac{2}{3}} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{-\frac{3}{5}} \times dx$, ou $D = b, m = \frac{1}{3}$, $c = c, f = -a$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{2b}{2a} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{\frac{2}{5}}$, $t = \frac{2}{3}$ : Alors l'integrale ſera $Q \times \frac{5x^{\frac{5}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, qui eſt la même choſe que $-\frac{30abx^{\frac{2}{3}}+75bc}{28aa} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{\frac{2}{5}}$.

## SCHOLIE I.

8. On peut trouver, par la formule précedente, une formule generale pour les expreſſions differentielles trinomes ou plus compoſées, qui ſervira très-utilement pour trouver les integrales des differentielles propoſées, qui par-là ſont moins compliquées, & peuvent être réduites à la même forme que ces formules. Mais comme cette voye eſt extrêmement longue, il vaut mieux chercher ces integrales, *par la premiere méthode du troiſiéme cas*, en réduiſant ces expreſſions compoſées en des ſeries infinies ; ce qui les ſimplifie.

On ne doit point réduire en ſeries infinies ces expreſſions compoſées, qu'on n'ait auparavant eſſayé par addition, ſouſtraction, multiplication, diviſion, *&c.* les quantités changeantes ; car ſouvent on les réduit, par cette voye, à des formes ſimples, *comme au ſecond cas ci-deſſus*, où par ce moyen on trouve en termes finis leurs integrales.

Il eſt néceſſaire d'obſerver ici que lorſqu'une expreſſion differentielle & radicale ſe trouve de façon que la partie hors du ſigne eſt la differentielle de ce qui eſt ſous le ſigne, ou eſt dans un raport quelconque avec elle ; alors l'integrale ſe trouvera toujours en termes finis par ſubſtitution, *ſuivant le ſecond cas ci-deſſus.*

EXEMPLE I.

L'integrale de $adx\sqrt{ax-aa}$, ou $\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}} \times a\,dx$, où $adx$, eſt la differentielle de $\sqrt{ax-aa}$, ou de $\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}}$, ſera *ſuivant le ſecond cas*, $\frac{2}{3}\overline{ax-aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}ax-aa\sqrt{ax-aa}$.

EXEMPLE II.

L'integrale de $2xdx\sqrt{xx+aa}$, ou $\overline{xx+aa}^{\frac{1}{2}} \times 2xdx$, où $2xdx$, eſt la difference de $\overline{xx+aa}^{\frac{1}{2}}$ ſera, $\frac{2}{3}\overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{2xx+2aa}{3}\sqrt{xx+aa}$.

EXEMPLE III.

L'integrale de $\overline{a+x}^{\frac{m}{n}} \times dx$, ſera $\frac{n}{m+n}\overline{a+x}^{\frac{m+n}{n}}$.

EXEMPLE IV.

L'integrale de $xdx\sqrt{xx+aa}$, dont la differentielle $xdx$ hors du ſigne, eſt à celle qui y eſt compriſe $2xdx$, comme 1 à 2 ; l'integrale donc ſera $\frac{1}{3}xx+\frac{1}{3}ax$

$\sqrt{xx+aa}$. Car faiſant $\sqrt{xx+aa}=z$; alors $2zdz=2xdx$, & $\sqrt{xx+aa}\times xdx=z^2dz$, dont l'integrale, *ſuivant le ſecond cas*, $=\frac{1}{3}z^3=$, par la ſubſtitution à la premiere integrale déja trouvée; de cette maniere l'integrale *du ſecond exemple* peut ſe trouver en mettant $xx+aa=z^2$.

## EXEMPLE V.

L'integrale de $\sqrt[n]{x^m+a^q}\times x^{m-1}dx$, dont la differentielle $x^{m-1}dx$ hors du ſigne, eſt à la difference de la quantité qui y eſt compriſe; *par exemple*, $mx^{m-1}dx$, étant comme 1 à $m$, donnera pour integrale $\frac{1}{mn+m}\sqrt[n+1]{x^m+a^q}$: car ſi on fait $\sqrt[n]{x^m+a^q}=z$; alors $\sqrt[n]{x^m+a^q}=z^n$, & $\sqrt[n-1]{x^m+a^q}=z^{n-1}$; de même $nz^{n-1}dz=nmx^{m-1}dx\times\sqrt[n-1]{x^m+a^q}=nmx^{m-1}dx\times z^{n-1}$; & diviſant par $nz^{n-1}$, on aura $dz=mx^{m-1}dx$, ou $x^{m-1}dx=\frac{dz}{m}$; d'où on tire $x^{m-1}dx\times\sqrt[n]{x^m+a^q}=\frac{z^ndx}{m}$; & vous aurez pour integrale $\frac{1}{nm+m}z^{n+1}=\frac{1}{nm+m}\sqrt[n+1]{x^m+a^q}$.

Il eſt à propos de donner ici de ſimples differences *tirées des Quadratures des courbes de M. le Chevalier Newton*, dont les integrales ſe trouvent à côté en termes finis. Par ce moyen à la premiere inſpection on trouve l'integrale d'une difference, lorſque cette difference ſe trouve conforme à la table, ou par le moyen d'une ſubſtitution facile. Dans cette table $z$ eſt la quantité variable & $D$, $e$, $f$, $g$, $h$, $n$, ſont des quantités conſtantes ou données.

| | FORMES DES DIFFERENCES. | INTEGRALES. |
|---|---|---|
| I. | $Dz^{n-1}dz$ | Integ. $= \frac{D}{n} z^n$. |
| II. | $\frac{Dz^{n-1}dz}{e^2+2efz^n+f^2z^{2n}}$ | Integ. $= \frac{Dz^n}{ne^2+nefz^n}$, ou $\frac{-D}{nef+nf^2z^n}$. |
| III. 1. | $Dz^{n-1}dz \times \sqrt{e+fz^n}$ | Integ. $= \frac{2D}{3nf} R^3$, $R$ étant $= \sqrt{e+fz^n}$. |
| III. 2. | $Dz^{2n-1}dz \times \sqrt{e+fz}$ | Integ. $= \frac{-4e+6fz^n}{15nf^2} DR^3$. |
| III. 3. | $Dz^{3n-1}dz \times \sqrt{e+fz^n}$ | Integ. $= \frac{16e^2-24efz^n+30f^2z^{2n}}{105nf^3} DR^3$. |
| III. 4. | $Dz^{4n-1}dz \times \sqrt{e+fz^n}$ | Integ. $= \frac{-96e^3+144e^2fz^n-180ef^2z^{2n}+210f^3z^{3n}}{945nf^4} DR^3$ |
| IV. 1. | $\frac{Dz^{n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$ | Integ. $= \frac{2D}{nf} R$. |
| IV. 2. | $\frac{Dz^{2n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$ | Integ. $= \frac{-4e+2fz^n}{3nf^2} DR$. |
| IV. 3. | $\frac{Dz^{3n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$ | Integ. $= \frac{16e^2-8efz^n+6f^2z^{2n}}{15nf^3} DR$. |
| IV. 4. | $\frac{Dz^{4n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$ | Integ. $= \frac{-96e^3+48e^2fz^n-36ef^2z^{2n}+30f^3z^{3n}}{105nf^4} DR$. |

SCHOLIE.

Je vais, avant que de finir cette section, ajouter un mot

ſur l'excellente méthode de feu *M. Cottes*, Profeſſeur d'Aſtronomie & de Philoſophie experimentale dans l'Univerſité de Cambrige, publiée après ſa mort ſous le titre *de Harmonia Menſurarum*, par ſon ſucceſſeur M. Smith, touchant la maniere de trouver les integrales des differentielles par les meſures des raports & des angles.

On évite par cette méthode la peine de réduire les quantités en ſeries infinies, qui ſe trouvent très-incommodes en bien des occaſions; ſouvent même à cauſe de leur lenteur à converger on ne s'en ſert pas. Mais la bonne façon pour integrer les differences, eſt de les trouver géométriquement, à l'aide des amples tables de Logarithmes de Briggs; de même que pour trouver la meſure des raiſons & des raports, on ſe ſert d'une grande table de ſinus & tangentes pour la meſure des angles. De-là on peut tirer un merveilleux moyen pour réſoudre tout probleme quelque compoſé qu'il ſoit, comme la quadrature d'une eſpace curviligne, la rectification des courbes, la cubation des ſolides, *&c.* dans leſquels les integrales des differentielles données ſont employées. Je donnerai pluſieurs exemples à ce ſujet.

Dans le livre que je viens de citer, il y a deux ſeries ou tables, où à la tête de chaque page ſe trouvent pluſieurs formes de differences avec leurs integrales qui ſont exprimées au-deſſous par la meſure des raiſons ou des angles. Une de ces deux ſeries eſt compoſée par *M. Cottes* lui-même, & l'autre par le *Docteur Smith*. Dans les tables de M. Cottes, auſquelles je me bornerai, comme étant ſuffiſantes pour ce que nous nous propoſons, & même pour ce qui ſe preſente ordinairement, $z$ eſt la quantité variable; $D$, $e$, $f$, ſont des quantités conſtantes; $n$ eſt un expoſant general d'une puiſſance quelconque de $z$, $\theta$ un nombre quelconque affirmatif ou negatif, & les quantités $R$, $S$, $T$, ſont toujours les trois côtés d'un triangle rectangle, dont les valeurs placées au bas de chaque page, expriment le raport ou l'angle; & c'eſt par leurs meſures qu'on a les integrales des differences données. Si $R$ eſt la racine quarrée d'une quantité affirmative, elle exprime une raiſon, étant toujours comme $R + T$, à $S$. Mais ſi $R$ eſt la racine quarrée d'une quantité négative, elle dénote un angle qui ſera toujours comme la tengente & la ſecante ſont au rayon, ou comme

$T$ & $S$ eſt à $R$, où la quantité négative eſt changée en affirmative. Dans les colonnes de chaque page des tables, où $\theta$ eſt à la tête, ſont une partie des valeurs affirmative & négative de $\theta$, vis-à-vis leſquelles ſe trouvent les integrales des differences, comme dans la ſeconde forme $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}dz$; quand $\theta=2$, l'integrale eſt $\frac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{3nf}-\frac{2Dez^{\frac{1}{2}n}}{nff}+\frac{2e}{nff}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$; quand $\theta=0$, l'integrale eſt $\frac{1}{ne}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$; & quand $\theta=-1$, l'integrale eſt $\frac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}}+\frac{2}{ne}DR\left|\frac{r+t}{s}\right.$; ainſi des autres.

Mais on ne peut bien déterminer ces integrales que lorſque la quantité $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ eſt connuë, qu'on apelle la meſure du raport, ou raiſon de $R+T$ & $S$ au module $R$, quand $R$ eſt affirmatif, ou juſqu'à ce que la quantité $\frac{2e}{nff}DR\left|\frac{T+R}{S}\right.$ ou $\frac{2}{ne}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$ ou $\frac{2}{ne}Dr\left|\frac{r+t}{s}\right.$, ſoit trouvée dans pluſieurs integrales, dont le premier eſt la meſure ou raport de $R+T$, & de $S$ au module $\frac{2e}{nff}DR$ : le ſecond eſt la meſure du raport de $R+T$ & de $S$ au module $\frac{2D}{n}R$; & le troiſiéme de $R+T$, & de $S$ au module $\frac{2}{ne}DR$. Or quand $R$ eſt négatif, la quantité $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ eſt = à la meſure d'un angle dont le rayon, la tengente, & la ſecante, ſont les valeurs reſpectives de $R$, $T$ & $S$ au rayon $R$, comme à un module. Je donnerai bientôt la maniere de trouver la meſure d'un raport ou d'un angle à un module donné; mais il eſt à propos de donner auparavant quelques définitions ou explications des termes, pour ſe rendre plus claires, & afin qu'une perſonne puiſſe entendre avec ordre l'uſage de ces excellentes tables, ſans être obligé de lire les propoſitions de la premiere partie *de harmonia menſurarum*, qui ſont traitées trop generalement pour être conçuës par une médiocre capacité, & ſans beaucoup d'aplication.

## Definition I.

La raiſon d'un raport eſt une quantité quelconque proportionnelle à ce raport; c'eſt-à-dire, ſi $M$, eſt la meſure du raport de $A$, à $B$, ou de $\frac{A}{B}$; & $m$, la meſure du raport de $a$ à $b$, ou $\frac{a}{b}$; alors on aura $M : \frac{A}{B} :: m : \frac{a}{b}$. Ainſi les raiſons égales ont les mêmes meſures: ſi un raport eſt le double de l'autre, la meſure du premier ſera double de celui du ſecond; ſi le premier eſt triple du ſecond, la meſure du premier ſera triple de celle du dernier; ſi la moitié, la moitié, *&c.* de ſorte que ſi on augmente ou diminuë par compoſition ou reſolution, ſa meſure ſera également & proportionellement augmentée ou diminuée.

Il faut obſerver que la meſure d'un raport d'égalité eſt o, & ſi la meſure d'un raport d'une quantité plus grande à une moindre, eſt ſupoſée poſitive, alors la meſure du raport d'une quantité petite comparée à une grande, ſera négative.

## Definition II.

*La meſure numerique d'un raport*, eſt l'excès du logarithme d'un nombre marquant l'antecedent au-deſſus du logarithme d'un nombre exprimant le conſequent; c'eſt-à-dire, le logarithme du quotient de la diviſion de l'antecedent par le conſequent, eſt la meſure numerique d'un raport numerique.

## Definition III.

*La meſure trigonometrique d'un angle*, eſt la quantité de degrés, de minutes, de ſecondes, *&c.* compris dans cet angle.

## Definition IV.

*Le module des logarithmes de Briggs, Vlaque, &c.* eſt o, 434294481903, *&c.* par lequel l'unité étant diviſée, le quotient 2, 302585092994, *&c.* ſera le module réciproque du logarithme déja cité, c'eſt-à-dire, le quotient de la diviſion d'une quantité quelconque par le premier module, eſt égale au produit de cette quantité multipliée par le module reciproque.

Cette

Cette définition, ou plûtôt cette deſcription de la quantité du module des logarithmes, eſt ſuffiſante pour ce que je me propoſe. Ceux qui n'en ſeront pas ſatisfaits, pourront conſulter *la premiere propoſition*, les corollaires & les ſcholies de la premiere partie *de harmonia menſurarum*. On peut en uſer de la même façon pour les définitions ſuivantes, qui ſont des conſéquences *de la propoſition*. Voyez les Notes de l'ingénieux M. *Smith*, page 94, à la fin de ſes *harmonia menſurarum*.

## DEFINITION V.

Le module trigonometrique, ou le nombre de dégrés contenus dans un arc de cercle égal au rayon, eſt à 180 degrés, comme le rayon du cercle eſt à la demie circonference, eſt 57° 17′ 44″, ou 57, 2957795130; par lequel l'unité étant diviſée, le module réciproque de la regle trigonometrique eſt 0, 0174532925.

## PROPOSITION I.

9. *Trouver la meſure d'un raport donné, à un module donné; ou trouver la quantité de l'expreſſion* $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, *R étant la racine quarrée d'une quantité affirmative, & R, T, S, les trois côtés d'un triangle rectangle.*

*Formule.* Comme le module du logarithme 0, 434294-481903, *&c.* eſt au module $R$ du raport $R+T$ à $S$; ainſi le logarithme de ce raport eſt à ſa meſure, ayant $R$ pour module qui eſt égal à $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ ou bien multipliez le produit du logarithme du raport propoſé $R+T$ à $S$, & de la quantité $R$ comme module, par le module réciproque 2, 302585092-994, *&c.* ce ſecond produit eſt la meſure du raport $R+T$ à $S$ avec $R$, qui en eſt le module, & il eſt égal à la valeur de $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ quantité cherchée.

Voici un exemple numerique; ſoit $R=8$, $T=6$, $S=10$.

Le module du logarithme 0, 43429448 1903 : 8 : : le logarithme (de $\frac{14}{10}$) 0, 1461280 : 2, 6916777= à la meſure

du raport de 14 & 10 au module 8, égal à $8\left|\frac{8+6}{10}\right.$.

Ou pour abreger, 1: *recip. mod. log.* 2, 302585092994 :: le logarithme(de $\frac{14}{10}$) 0, 1461280 × 8 : module donné, 2, 6916777 meſure du raport comme ci-devant.

*Fig. 2.* Ce probleme peut être réſolu ſans calcul, par le moyen du ſecteur d'une hyperbole, de la maniere ſuivante. Que $AG$ ſoit une hyperbole, $CA$ la moitié de ſon diametre, $CB$, la moitié du conjugué, & $CE$, une aſymptote. Tirez $A\mathcal{Q}$, parallele à $CB$, enſuite faites $R : T :: A\mathcal{Q} : AD$, & ſi $CA \times CB$ eſt$=2R$, le ſecteur $CAM=R\left|\frac{R+T}{S}\right.$; le triangle $CAD$ étant égal à $T$, quand $T$ eſt moindre que $R$, & le triangle $CBE$, égal à $T$, quand $T$ eſt plus grand que $R$.

## Corollaire I.

10. Il ſuit de-là que ſi $m$ eſt un module conſtant du logarithme, & $l$ le logarithme du raport $\frac{R+T}{S}$, pour lors on aura $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R \times \frac{l}{m}$.

## Corollaire II.

11. Il ſuit encore que $\frac{nR}{m}\left|\frac{T^{\frac{m}{n}}}{S^{\frac{m}{n}}}\right. = R\left|\frac{T}{S}\right.$ : $m$ étant un nombre entier quelconque, & $n$ un autre, cette forme ſuit la nature des logarithmes.

## PROBLEME II.

12. *Trouver la meſure d'un angle, dont le rayon eſt comme R, la tangente comme T, & la ſecante comme S, à la quantité R, comme module : ou trouver la valeur de cette expreſſion* $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, *R étant la racine quarrée d'une quantité négative, par conſéquent impoſſible ; toutes étant des quantités données.*

*Formule.* Dites premierement, comme la valeur de $R$ eſt à la valeur de $T$, ou comme la valeur de $R$ eſt à la valeur de $S$, ainſi dans les tables les rayons des tangentes & ſecantes, ſont aux tangentes ou ſecantes de l'angle à meſurer, vis-à-vis deſquels ſe trouve la valeur de cet angle en degrés ou minutes, *&c.* en étant la meſure trigonometrique : enſuite dites comme le module trigonometrique 57°, 17′, 44″, ou 57, 2957795130. eſt à la meſure trigonometrique juſte de l'angle, ainſi le module de cet angle ; par exemple, $R$ eſt à la meſure dudit angle, ayant $R$ pour module égal à la quantité $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ ; ou bien multipliez le produit de la meſure trigonometrique de l'angle par le module $R$, par le module réciproque logarithmique 0, 0174532925, & ce ſecond produit eſt la meſure de l'angle au module donné $R$.

En voici un exemple numerique ; que $R=16$, $T=12$, $S=20$, on a 16 : 12, comme le rayon 10000000 : 7500000 = à la tangente, & 16 : 20 : : le rayon 10000000 : 12500000 = à la ſecante.

Vous trouverez vis-à-vis dans les tables 36°, 52′, 6″, pour la meſure trigonometrique de l'angle.

Ou bien ; le module trigonometrique 57, 2957795130 : à la meſure trigonometrique 36, 86833331 : : le module 16 : 10. 4330985 = à la meſure de l'angle, dont le rayon eſt comme 16, la tangente comme 12, & la ſecante comme 20, au module 16 ; ou égal à $16\left|\frac{16+12}{20}\right.$.

Obſervez qu'on abrege bien plus en ſe ſervant du module

réciproque 0174532925. qu'en ſe ſervant du directe, & les opérations ſont bien plus courtes, en ſe ſervant des logarithmes pour trouver le quatriéme terme de la proportion dans les problemes précedens comme dans celui-ci.

On peut réſoudre également ce probleme, ou par le moyen d'un ſecteur de cercle, ou par celui d'un élipſe, de la maniere ſuivante. Que $CA$, $CB$, ſoient les rayons d'un quart de cercle, ou demies axes d'un élipſe $AB$; tirez l'une ſur l'autre égal à $2R$; tirez $A\,Q$, parallele à $CB$, & $BG$, parallele à $CA$; faites enſuite $R : T :: CB : AD$; tirez la ligne droite $CMDG$; alors le ſecteur $CAM$ eſt égal à $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ quand $R$ eſt plus grand que $T$ = au triangle $CAD$, & le ſecteur $CBM = R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, quand $R$ eſt moindre que $T$ = au triangle $CBG$. *Fig. 3.*

Remarquez que quand par hazard $S$, ſe trouve la racine quarrée d'une quantité négative, & par conſéquent impoſſible, vous pouvez changer le ſigne, & vous parviendrez également bien à la ſolution.

## COROLLAIRE.

13. Si $a$ eſt un angle dont les rayons, tangentes & ſecantes, ſoient $R$, $T$, $S$, & que $m$ ſoit un module conſtant, alors $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = \frac{aR}{m}$.

## SCHOLIE.

14. $R$, $T$, $S$, étant toujours les trois côtés d'un triangle rectangle; donc $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R\left|\frac{S}{T-R}\right.$, ſupoſant $T$ l'hypothenuſe; car par la proprieté du triangle rectangle $T = \sqrt{RR+SS}$; & de même $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R\left|\frac{R+\sqrt{RR+SS}}{S}\right.$, & $R\left|\frac{S}{T-R}\right. = R\left|\frac{S}{\sqrt{RR-SS}-R}\right.$; & multipliant en croix, vous trouverez $\sqrt{\sqrt{RR+SS}+R} \times \sqrt{\sqrt{RR+SS}-R} = SS$; la ſomme de deux nombres multipliés par leurs differences étant égale

à la difference de leurs quarrés ; ainſi $\frac{R+\sqrt{RR+SS}}{S}$ eſt $=$ $\frac{S}{-R+\sqrt{RR+SS}}$ ; c'eſt-à-dire $\frac{R+T}{S} = \frac{S}{T-R}$ ; conſéquemment $R\left|\frac{R+T}{S} = R\right|\frac{S}{T-R}$.

Ceci paroît évident par la figure 83 ; car que l'hypothenuſe $AB=T$, la perpendiculaire $CB=R$, & la baze $AC=S$, continuë $AB$, juſqu'à ce que $BD=BC=R$, faites $BE=BC$ ; alors vous aurez $AD=R+T$, & $AE=T-R$ : ſi l'on décrit un cercle autour de $B$, de l'intervale $BC$, comme rayon, il paſſera par $E$ & par $D$, & $AC$ le touchera au point $C$ ; par conſéquent *par la trente-ſixiéme propoſition, liv. troiſiéme d'Eucl.* $\overline{AC}^2$ $(SS) = AD \times AE = \overline{R+T} \times \overline{T-R}$ ; donc $\frac{R+T}{S} = \frac{S}{T-R}$.

## SECTION III.

### *Uſage de la methode des integrales pour la quadrature des eſpaces curvilignes.*

### PROBLEME.

*15. Quarrer un eſpace curviligne.*

Fig. 1. AYant trouvé l'équation qui exprime le raport d'une abſciſſe quelconque $AP$ ($x$) à ſon ordonnée correſpondante $PM$ ($y$) qui la coupe à angles droits, cherchez d'abord la valeur de $y$ qu'il faut multiplier par $dx$; l'integrale de ce produit exprimera la quadrature de l'eſpace mixtiligne indéterminé, compris par l'abſciſſe $AP$, l'ordonnée $PM$, & la courbe $AM$; & ſi l'abſciſſe $AP$ eſt déterminée, par $Ex$: égale à une grandeur donnée $a$, la courbe conſéquemment le ſera auſſi; ainſi en ſubſtituant $a$ pour $x$ dans l'integrale déja citée, il en réſultera une expreſſion qui ſera la quadrature de l'eſpace mixtiligne déterminé. Les exemples ſuivans rendront ceci plus intelligible.

Fig. 4. Mais ſi l'aire $CDEF$ eſt contenuë entre deux courbes ou lignes droites $DE$, $CF$, la ligne droite $CD$, & la partie d'une droite $EF$ d'une ligne quelconque $AE$, tirée d'un point donné $A$, pris dans la droite $CD$; alors tirez $Afe$, infiniment proche de $AFE$, & du centre $A$ décrivez les petits arcs $Fp$, $Eq$; enſuite par la nature de la courbe, trouvez l'aire de l'eſpace quadrilatere $FEqp$, qui eſt égal à la difference des petits ſecteurs $AFp$, $AEq$, ou égal à $\frac{1}{2} AE \times Eq - \frac{1}{2} AF \times Fp$. égale à l'eſpace $FEef$, difference de l'aire $CDEF$, dont l'integrale ſera égale audit aire. Je donnerai dans la ſuite des exemples de ceci.

## EXEMPLE I.

### 16. *Trouver l'aire d'un triangle ABC.*

Tirez $AD$, perpendiculaire à un des côtés, comme $BC$, dans laquelle prenez entre le point $A$ & $D$ le point $P$, ſur lequel tirez la ligne $MN$ perpendiculaire à $AD$; que $mn$ ſoit infiniment proche & parallele à $MN$, & tirez $Mp$, $Nq$, perpendiculaires à $MN$; alors le rectangle $MNqp$, compris par $Mp$ & $Nq$, ou $Pp$, & l'ordonnée $MN$, eſt l'élement de l'aire indéterminée $AMN$, qu'on trouvera ainſi. *Fig. 5.*

Que la quantité variable $AP$ ſoit apellée $x$, $PM$, $y$, les conſtantes & données $AD$, $a$; $CB$, $b$, & parce que $MN$ eſt parallele à $BC$, on aura $AD\ (a) : CB\ (b) :: AP\ (x) : MN\ (y)$, d'où on tire $y = \frac{bx}{a}$ : mais $Pp\ (= Mp = Nq) = dx$ : ainſi l'élement de l'aire indéfinie $AMN$, eſt $\frac{bx}{a}dx$, dont l'integrale eſt, *ſelon le ſecond cas*, $\frac{bx^2}{2a}$ qui eſt égale à l'aire $AMN$; maintenant ſi au lieu de $AP\ (x)$ vous ſubſtituez $AD\ (a)$ vous aurez $\frac{bx^2}{2a}\ (= \frac{1}{2}ab) = \frac{1}{2}AD \times CB$, aire totale de tout le triangle $ACB$; ce que nous ſçavons d'ailleurs être vrai par les élemens de géometrie.

Nous n'oublierons point ici de donner la maniere de trouver, par les integrales, l'aire d'un trapeze $GPCB$ ayant deux côtés $PC$, $GB$, paralleles, & les angles $B$, $C$, droits : il eſt vrai qu'on les trouve plus promptement par les élemens communs de la géometrie, mais il eſt agréable de découvrir la verité par pluſieurs points de vûë. *Fig. 6.*

Pour y parvenir, continuez $CB$ & $PG$, juſqu'à leurs rencontres en $A$, du point $A$ tirez $Amp$, infiniment proche de $AGP$, & des diſtances $Am$, $Ap$; décrivez du centre $A$ les arcs ſemblables $mr$, $pn$, enſuite faites $AB = a$, $BC = b$, $BG = x$, $AG = y$. Maintenant à cauſe de la ſimilitude des triangles $ACP$, $pPn$, qui ont les angles $C$, & $n$ droits, & l'angle $P$ commun, on aura $AG\ (y) : AB\ (a) :: Gm\ (dx) : mr = \frac{adx}{y}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2}Ar\ (= \frac{1}{2}AG = \frac{y}{2})$

donnera pour produit $\frac{adx}{2}$, égale à l'aire du petit triangle *Arm*, ou *AGm*, qui ne differe ſeulement que du triangle *Gmr*, infiniment plus petit qu'aucun d'eux.

Les triangles *ABG*, *ACP*, étant ſemblables, on aura *AB* $(a) : AG\ (y) :: BC\ (b) : GP = \frac{by}{a}$; & par conſéquent *AP* $= \frac{by}{a} + y$, & parce que *Am*, *AG*, & *AP*, *Ap* different ſeulement les uns des autres d'une grandeur infiniment petite; ainſi on peut prendre *Am*, pour *AG*, & *Ap*, pour *AP*, ce qui étant accordé, & les triangles *Amr*, *Apn*, pris pour ſemblables, on aura $AG\ (y) : rm\ (\frac{adx}{y}) :: AP\ (\frac{by}{a} + y) : pn = \frac{bdx}{y} + \frac{adx}{y}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2}\ AP\ (\frac{by}{2a} + \frac{y}{2})$ donnera pour produit $\frac{bbdx}{2a} + bdx + \frac{1}{2}\ adx$, égale à l'aire du triangle *Apn*, ou *APp*, duquel retranchant l'aire du triangle *AmG* $(\frac{adx}{2})$ trouvée ci-devant; le reſte $bdx + \frac{bb}{2a}\ dx$, eſt l'aire du trapeze *mpnr*, qu'on peut regarder pour l'aire du trapeze *mpPG*, qui eſt l'élement du trapeze *BCPG*; mais l'integrale de cet élement eſt $bx + \frac{bbx}{2a} = \frac{2abx + bbx}{2a} = \overline{\frac{2ax + xb}{a}} \times \frac{b}{2}$; mais $\frac{ax + bx}{a} = PC$, ainſi puiſque par la ſimilitude des triangles *ABG*, *ACP*. $AB\ (a) : BG\ (\lambda) :: AC\ (a + b) : CP = \frac{ax + bx}{a}$; donc $\overline{GB + PC} \times \frac{1}{2}\ BC =$ l'aire du trapeze *GPCB*; ce que nous ſçavions déja être vrai par les élemens ordinaires de la géometrie.

## EXEMPLE II.

17. *Trouver l'aire, ou quarrer l'eſpace parabolique ordinaire A B D.*

*Fig.* 1. Nommez les quantités connuës *AD*, *a*; *BD*, *b*, l'abeiſſe invariable *AP*, *x*, l'ordonnée correſpondante *PM*, *y*, faites $Pp = dx$. Maintenant l'équation qui exprime le raport de chaque *AP*, *x*, à *PM*, *y*, eſt $px = yy$; d'où on tire $y =$

$=\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ : Ainſi le petit rectangle $PMnp$, qui eſt égal à l'élement de l'eſpace indéfini $AMP$, ſera $\sqrt{px}\times dx$ ; c'eſt-à-dire, $ydx=p^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}dx$, dont *ſelon le ſecond cas*, l'integrale eſt $=(\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{px^3}=\frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2})=\frac{2}{3}xy$, égale à l'eſpace indéterminée $AMP$, en ſubſtituant $a$ pour $x$, & $b$, pour $y$, dans cette integrale; on aura $\frac{2}{3}ab=\frac{2}{3}AP\times PM$; c'eſt-à-dire, que l'eſpace parabolique eſt au rectangle formé par la moitié de l'ordonnée & par l'abſciſſe, comme $\frac{2}{3}xy$ eſt à $xy$, ou comme 2 eſt à 3.

## Exemple III.

18. *Quarrer les paraboles de tous les genres.*

Si $AP$ ($x$) eſt l'abſciſſe, & $PM$ ($y$) l'ordonnée correſpondante, alors le raport qui eſt entre les abſciſſes & les ordonnées d'une parabole telle qu'elle ſoit, s'exprimera par cette équation generale $p^m x^n=y^q$ ; donc $p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}=y$ : ainſi l'element de l'aire ſera $ydx=p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}dx$ ; & ſon integrale, *ſuivant le ſecond cas*, *ſection* 2, ſera $\frac{q}{n+q}p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n+q}{q}}=\frac{q}{n+q}xy$ ; car $p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}=y$. Donc tout paraboloïde eſt au rectangle formé par l'ordonnée & par l'abſciſſe, comme $\frac{qxy}{n+q}$ eſt à $xy$, ou, comme $q$ eſt à $n+q$. *Fig. 1.*

## Exemple IV.

19. *Quarrer le ſegment de l'eſpace parabolique PMNQ, compris par les ordonnées PM, NQ, par la partie PQ de l'abſciſſe, & la partie MN de la courbe.*

On ſupoſe ici $AP=a$, invariable, $P$ l'origine des quantités changeantes, $PQ=x$. De même $QN=y$, & le parametre $=p$ ; alors $AQ=a+x$, tirez $nq$, parallele & infiniment proche à $NQ$. *Fig. 7.*

Maintenant par la proprieté de la courbe $\overline{AP+PQ}\times p=\overline{NQ}^2$, $=pa+px=yy$, & $\sqrt{pa+px}=y$, donc $QN$

$\times \mathcal{Q}q = ydx = dx\sqrt{pa+px} = 1x^0 \times \overline{pa+px}^{\frac{1}{2}} dx$, qui eſt l'élement de l'aire, dont on trouvera par la derniere maniere *du ſecond cas*, *ſection deuxiéme*, l'integrale ; mais on le fera plus aiſément ſi on ſupoſe $\sqrt{pa+px} = z$ ; car alors $pa+px = zz$, & $pdx = 2zdz$ & $dx = \frac{2zdz}{p}$ ; donc $ydx = \frac{2z^2dz}{p}$, & alors l'integrale ſera $\frac{2}{3}\frac{z^3}{p} = \frac{2}{3}\frac{pa+px \times \sqrt{pa+px}}{p} = \frac{2}{3}a+x \times \sqrt{pa+px} = \frac{2}{3} A\mathcal{Q} \times N\mathcal{Q}$.

Mais parce que dans le point $P$, $x=0$, l'eſpace $PMN\mathcal{Q}$, s'évanoüit ; ainſi, faiſant $x=0$ dans l'integrale déja trouvée, les termes $x$ & $px$, s'évanoüiront ; de façon que l'integrale ſera $\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, qui indique ce qu'on doit ajouter à l'integrale, afin que l'eſpace $MPN\mathcal{Q}$, ſoit nulle ou o, dans le point $P$, ce qui donnera la quadrature cherchée ; en ce cas $\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, doit être retranché ; ainſi l'aire de $MPN\mathcal{Q} = \frac{2}{3}a+x\sqrt{pa+px} - \frac{2}{3}a\sqrt{pa} = \frac{2}{3}A\mathcal{Q} \times N\mathcal{Q} - \frac{2}{3}AP \times PM$.

*Autrement.*

Tirez $mp$, infiniment proche de $MP$ ; faites $A\mathcal{Q} = a$, invariable ; que l'origine de $x$ ſoit en $\mathcal{Q}$, & que $\mathcal{Q}P = x$, $PM = y$, ce qui donnera $AP = a-x$.

Maintenant par la propricté de la courbe $\overline{A\mathcal{Q}-\mathcal{Q}P}^{2} \times p = PM$ ; c'eſt-à-dire, $pa-px = yy$ ; ce qui donne $\sqrt{pa-px} = y$. Ainſi $MP \times Pp$, élement de l'aire, eſt $ydx = dx\sqrt{pa-px}$ ; dont on peut trouver l'integrale de cette façon : Faites $pa-px = zz$, vous aurez $-pdx = 2zdz$, & conſéquemment $dx = -\frac{2z^2dz}{a}$, & $ydx = -\frac{2z^2}{a}dz$, dont l'integrale eſt $-\frac{2z^3}{3a} = -\frac{2}{3}\frac{\overline{a-x} \times \sqrt{pa-px}}{a} = \frac{2}{3}\overline{x-a} \times \overline{pa-px}$.

Preſentement pour trouver ce qu'on doit ajoûter à l'integrale pour avoir la quadrature de l'eſpace $PMN\mathcal{Q}$, faites comme auparavant $x=0$ dans l'integrale, & vous aurez

$-\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$; d'où il eſt évident que ſi $+\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, eſt ajoûté à l'integrale, l'eſpace $PMN\mathcal{Q}=\frac{2}{3}a\sqrt{pa}+\frac{2}{3}\sqrt{x-a}\times\sqrt{pa-px}$.

## COROLLAIRE I.

20. L'eſpace $PMN\mathcal{Q}=AN\mathcal{Q}-AMP$; mais dans la premiere maniere $AN\mathcal{Q}=\frac{2}{3}A\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}N=\frac{2}{3}\sqrt{a+x}\times\sqrt{pa+px}$; & $AMP=\frac{2}{3}AP\times PM=\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$: donc $PMN\mathcal{Q}=\frac{2}{3}A\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}N-\frac{2}{3}AP\times PM$.

Il faut obſerver que dans la derniere maniere $AN\mathcal{Q}=\frac{2}{3}A\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}N=\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, & $AMP=\frac{2}{3}AP\times PM=\frac{2}{3}\sqrt{a-x}\times\sqrt{pa-px}$; donc $\mathcal{Q}NMP=\frac{2}{3}A\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}N-\frac{2}{3}AP\times PM$, comme nous avons trouvé auparavant.

## COROLLAIRE II.

21. Si la courbe n'eſt point décrite, & que l'équation qui l'exprime ſoit ſeulement donnée, alors étant incertain de l'origine de $x$, il eſt évident, ſelon la ſolution précedente, qu'on doit ſubſtituer o pour $x$, dans l'integrale; ce qui effacera ou fera diſparoître tous les termes affectés de $x$; alors ce qui reſtera doit s'ajoûter à l'integrale en changeant le ſigne, & le tout ſera la quadrature requiſe.

## EXEMPLE V.

22. *Quarrer une courbe exprimée par cette équation* $x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^5=a^4y$.

Puiſque $y=\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2}{a}+a$, l'élement de l'aire ſera $ydx=\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2}{a}+a\times dx$, & l'integrale ſera $\frac{x^6}{6a^4}+\frac{x^5}{5a^3}+\frac{x^4}{4a^2}+\frac{x^3}{3a}+ax$.

## Exemple VI.

23. *Quarrer une courbe quelconque dont la nature eſt exprimée par cette équation*, $y = x\sqrt[m]{x+a}$.

Parce que $y = x \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}}$, il s'enſuit que l'élement de l'eſpace cherché eſt $ydx = xdx \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}}$, dont on trouvera facilement l'integrale, en faiſant $\overline{x+a}^{\frac{1}{m}} = z$ : car alors $x+a = z^m$, & differentiant chaque membre de cette équation, on aura $dx = mz^{m-1}dz$, d'où $ydx = mz^m dz$ & l'integrale $= \frac{mz^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}\overline{x+a} \times \sqrt[m]{x+a}$.

Maintenant pour ſçavoir ſi c'eſt la même integrale, je ſupoſe $x = o$, alors cette derniere expreſſion eſt $\frac{m}{m+1}\,a\sqrt[m]{a}$, qui, *ſuivant le ſecond corollaire, exemple ſecond*, doit être retranchée de l'integrale ; de maniere que la veritable integrale ou quadrature ſera $\frac{m}{m+1}\overline{x+a} \times \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1}\,a\sqrt[m]{a}$.

## Exemple VII.

Fig. 8. 24. *Quarrer les hyperboles de tous les degrés par raport à leurs aſymptotes ; ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire de l'eſpace indéterminé HMPAS ou hMPs ; le premier contenu ſous l'abſciſſe AP, l'ordonnée PM, l'aſymptote AS, & la partie MH, de la courbe hyperbolique ; & le dernier ſous l'ordonnée PM, la partie reſtante Ps de l'aſymptote, & ſous la partie Mh de la courbe hyperbolique.*

Le raport qui eſt entre les $AP$ $(x)$ & les $PM$ $(y)$, s'exprime en general dans ces courbes par l'équation ſuivante $a^{m+n} = y^m x^n$.

D'où on tire $a^{m+n}x^{-n}=y^m$, & $a^{\frac{m+n}{n}}x^{-\frac{n}{m}}=y$; donc $PM\times Pp=ydx=a^{\frac{m+n}{n}}x^{-\frac{n}{m}}dx$, dont l'integrale eſt $(\frac{m}{m-n}a^{\frac{m+n}{m}}\times x^{-\frac{n+m}{m}}=\frac{m}{m-n}\sqrt[m]{a^{m+n}x^{m+n}}=\frac{m}{m-n}\sqrt[m]{y^m x^n})=\frac{m}{m-n}xy$.

Si $m$ eſt plus grand que $n$, alors la quadrature de l'eſpace indeterminée $HMPAS$ eſt toujours $=\frac{m}{m-n}AP\times PM$: mais ſi $m$ eſt moindre que $n$; alors $\frac{m}{m-n}xy$, eſt une quantité négative qui donne la quadrature de l'eſpace indéterminée $hMPs$ du côté oppoſé à l'ordonnée $PM$: mais quand $m=n$; alors aucun des deux eſpaces ne peuvent ſe quarrer, puiſque dans ce cas l'un & l'autre ſont infinis; car ſi $xy^2=a^3$, ce qui fait $m=2$, $n=1$, & ainſi $HMPAS=\sqrt{a^3x}=(\sqrt{x^2y^2})=xy$. Si $xy^4=a^5$; par conſéquent vous aurez $m=4$, $n=1$; ainſi $HMPAS=\frac{4}{3}xy$. Si $x^2y=a^5$, alors $m=1$, $n=2$; en ce cas $-xy$ ſera la quadrature de l'eſpace $hMPs$; ſi $x^4y=a^5$, ce qui donne $m=1$, $n=4$, & par conſéquent $-\frac{1}{3}xy$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{3}xy=hMPs$; mais quand $m=n$, alors $\frac{m}{m-n}=\frac{1}{0}$; ainſi le numerateur eſt infini par raport au dénominateur.

## EXEMPLE VIII.

25. *Quarrer l'hyperbole ordinaire avec ſes aſymptotes, ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire ou l'eſpace CcMP, compris par les ordonnées Cc, PM, la partie CP, de l'aſymptote & par la partie cM de la courbe hyperbolique.* Fig. 8.

Soit la quantité donnée $AC=b$ & ſoit $C$ l'origine de $x$. L'équation qui exprimera le raport de $AP\,(b+x)$ à $PM$

($y$) ſera $a^2 = by + xy$ ; ainſi $\frac{a^2}{b+x} = y$ & $ydx$ élement de l'aire, ſera $\frac{a^2}{b+x}\,dx$.

Maintenant, *ſuivant le troiſiéme cas, ſection premiere* ; ſon integrale ſera $\frac{a^2}{b}\,x - \frac{a^2}{2b^2}\,x^2 + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} +$ , *&c.* = à l'aire $CcMP$ ; & ſi vous ſupoſez $a = b = 1$ , alors $x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4$, *&c.* = à l'aire dont on a déja parlé.

*Autrement.*

*Par la meſure d'un raport ou d'un angle.*

La differentielle $\frac{a^2}{b+x}\,dx$ , peut ſe raporter à la premiere forme dans les Tables de M. *Cottes* ; car faiſant $z = x$, $n = 1$, $\theta = 1$ , $D = a^2$, $e = b$ , $f = 1$ , on aura $\frac{Dz^{\theta n-1}}{e+fz^n}\,dz = \frac{a^2}{b+x}\,dx$ , & l'integrale qui répond à $\theta = 1$ , eſt $\frac{D}{nf}\left|\frac{e+fz^n}{e}\right. = a^2\left|\frac{b+x}{b}\right. = \overline{AC}^2\left|\frac{AP}{AC}\right.$ égale à la meſure du raport de $AP$ & $AC$ , à $\overline{AC}^2$, comme au module que vous trouverez , *article 9* , égal à l'aire de l'eſpace $CcMP$ ; & ſi l'aſymptote $AS$ n'eſt point perpendiculaire à $As$ , & que l'ordonnée $PM$ , qui lui eſt parallele , ne ſoit point perpendiculaire à l'abſciſſe $AP$ , la meſure du raport de $AP$ à $PM$ , avec le parallelograme $ACc$ , comme module , donnera l'aire de l'eſpace $CcMP$,

Ceci eſt démontré par ſyntheſe , *page 12* , *partie premiere de harmonia menſurarum.*

## EXEMPLE IX.

26. *Trouver l'aire ou eſpace ACMP, contenu par la partie AP (x) d'une ligne droite infinie & perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole, par la ligne AC, (a) continuation du même axe, & par une ligne quelconque ou ordonnée PM (y) parallele à AC.*

Ici $aa+xx=yy$; donc $y=\sqrt{aa+xx}$ & $ydx=dx\sqrt{aa+xx}$, differentielle dont, *ſuivant le troiſiéme cas, ſection premiere*, l'integrale $=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ *&c.* = à l'aire *ACMP* cherchée, qui donne la quadrature du ſegment hyperbolique *DCM*, en le ſouſtrayant du rectangle *ADMP* (*ydx*); & ſi $a=1$; alors la ſerie eſt $x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\frac{x^7}{112}-\frac{5x^9}{1132}$, *&c.* Fig. 9.

*Autrement.*

*Par la meſure d'un raport ou d'un angle.*

La differentielle $dx\sqrt{aa+xx}$ ſe raporte à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes* : Car ſi $z=x$, $n=2$, $\theta=0$, $D=1$, $e=aa$, $f=1$, vous aurez $Dz^{(n+\frac{1}{2}r-1}dz\sqrt{e+fz^n}=dx\sqrt{aa+xdx}$, dont l'integrale eſt $\frac{z^n}{n}DP+\frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$; & faiſant $P\left(=\frac{\sqrt{e+fz^n}}{z^n}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, $R\left(=\sqrt{f}\right)=1$, $T\left(=\frac{\sqrt{e+fz^n}}{z^n}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right)=\frac{a}{x}$. Alors l'integrale deviendra $\frac{x}{2}\sqrt{aa+xx}+\frac{aa}{2}\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.=\frac{1}{2}AP\times PC+\frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{AP+PC}{AC}\right.=$, à l'aire *ACPM*; c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}$ *AP* × *PC* plus la meſure du raport de *AP*+*PC*, & de *AC* à $\frac{1}{2}$ *AC*, comme module, ſera l'aire.

La quadrature de l'eſpace hyperbolique *AMP* peut ſe trouver comme M. *Cottes* le dit dans ſon *harmonia menſurarum* de cette façon.

*Fig.* 10. Faites le demi-diametre conjugué $CB=b$, le demi-transverſale $CA=a$, $CP=x$, $PM=y$; enſuite par la proprieté de la courbe on a $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}=y$, ainſi $\frac{b}{a}\,dx\sqrt{xx-aa}$, = à l'élement de l'eſpace $AMP$.

Maintenant faiſant $D=\frac{b}{a}$, $z=x$, $\theta=0$, $n=2$, $e=-aa$, $f=1$, la differentielle de la quatriéme forme dans les Tables de M. *Cottes*, *par exemple*, $Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}\,dz\sqrt{e+fz^n}$ deviendra $\frac{b}{a}\,dx\sqrt{xx-aa}$, & ſon inregrale qui répond à $\theta=0$, donnera $\frac{z^n}{n}DP+\frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, & faiſant $P\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $R\,(=f)=1$, $T\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right)=\frac{a}{x}$; cette integrale viendra, $\frac{bx}{2a}\sqrt{xx-aa}-\frac{ab}{2}\left|\frac{x+\sqrt{xx-aa}}{a}\right.=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\left|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}\right.$, en ſubſtituant pour $y$ ſa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}$. Et *par l'article quatorziéme*, quand le raport de $x+\sqrt{xx-aa}$ à $a$, eſt égal au raport de $a$, à $x-\sqrt{xx-aa}=$ à $x-\frac{ay}{b}$; c'eſt pourquoi $\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\left|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}\right.$, eſt l'integrale de la differentielle $\frac{b}{a}\,dx\sqrt{xx-aa}$ qu'on peut conſtruire ainſi.

Faires $CF:CA\,(a)::PM\,(y):CB\,(b)$; c'eſt-à-dire, faites $CF=\frac{ay}{b}$: faites enſuite $CG:CA\,(a)::CB\,(b):PM\,(y)$, c'eſt-à-dire, $CG=\frac{ab}{y}$: enſuite ſi $CH$, eſt pris égal au raport de $CA\,(a)$ & $FP\,(=x-\frac{ay}{b})$ au module $\frac{ab}{y}$, c'eſt-à-dire, ſi on prend $CH=\frac{ab}{y}\left|\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}\right.$, & tirant la ligne droite $MH$, le rriangle rectiligne $HMP$ eſt égal à l'eſpace $AMP$. Car il eſt $=\frac{y}{2}\times x-\frac{ab}{y}\left|\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}\right.=\frac{yx}{2}-\frac{ab}{2}\left|\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}\right.$: ainſi pour trou-

ver

ver la quadrature de l'eſpace hyperbolique exterieure $CAMP$, de la même maniere, il faut s'y prendre ainſi. Fig. 11.

Que $AC$, $CB$, ſoient les deux demi-diametres conjugués $AC=a$, $CB=b$, $PM=x$, $CP=y$; ce qui donne $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}=y$, par la proprieté de la courbe.

Differentiant cette équation, vous aurez $\frac{bbx}{aay}dx=dy=\frac{bbx}{aby\sqrt{xx-aa}}dx=\frac{bx}{a\sqrt{xx-aa}}dx$; mais $dy\times x=\frac{bxx}{a\sqrt{xx-aa}}dx$ = à l'élement de l'eſpace hyperbolique $CAMP$.

Maintenant faiſant $D=\frac{b}{a}$, $z=x$, $n=2$, $\theta=1$, $e=-aa$, $f=1$; la differentielle $\frac{Dz^{\theta n-1+\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}dz$ de la ſixiéme forme dans les tables, deviendra $\frac{bx^2}{a\sqrt{xx-aa}}dx$, dont l'integrale $\theta$ étant $=1$, donne $\frac{z^n}{nf}DP-\frac{e}{nff}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$ : d'où faiſant $P\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $R\left(=\sqrt{f}\right)=1$, $T\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right)=\frac{a}{x}$; ladite integrale ſera $\frac{bx}{2a}\sqrt{xx-aa}-\frac{ab}{2}\left|\frac{x+\sqrt{xx-aa}}{a}\right.=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\left|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}\right.$, (ſubſtituant $y$ pour $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}$, *art.* 14.) = à l'integrale de la differentielle $\frac{bx^2}{a\sqrt{xx-aa}}dx$ qu'on peut conſtruire de cette maniere.

Prenez $CF:CB\,(b)::PM\,(x):AC\,(a)$; c'eſt-à-dire, faites $CF=\frac{bx}{a}$; & $CG:CB\,(b)::AC\,(a):PM\,(x)$; ou ce qui eſt le même $CG=\frac{ba}{x}$; enſuite ſi vous prenez $CH$ égal à la meſure du raport de $BC\,(b)$ & $PF\left(\frac{bx}{a}-y\right)$, (égal au raport de $a$, à $x-\frac{ay}{b}$), au module $CG\left(\frac{ba}{x}\right)$: le même $CH$ ſera $=\frac{ba}{x}\left|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}\right.$, & ſi vous tirez la ligne droite $MH$, le

triangle rectiligne eſt égal à l'eſpace $CAMP$ : car il eſt $= \frac{x}{2} \times y + \frac{ba}{x} \left| \frac{a}{x - \frac{ay}{b}} \right. = \frac{xy}{2} + \frac{ba}{2} \left| \frac{a}{x - \frac{ay}{b}} \right.$, integrale de la differentielle donnée.

## EXEMPLE X.

27. *Quarrer le cercle ; ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire d'un demi ſegment quelconque $APM$, de ce cercle.*

Fig. 12. Que $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$. Par la proprieté du cercle $AP \times PB = \overline{PM}^2$ ; c'eſt-à-dire, $x - xx = yy$ ; donc $y = \sqrt{x - xx}$ & $ydx = dx\sqrt{x - xx} = PM \times Pp$, égal à l'élement de l'aire $APM$ ; dont, *par le troiſiéme cas, ſection premiere*, l'integrale ſera $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$, *&c.* = à l'aire $AMP$, ou bien $x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{28} x^3 - \frac{1}{72} x^4$, *&c.*

*Autrement.*

Si le rayon $CM = a$, & qu'on ſupoſe $CP = x$, $PM = y$ ; par la proprieté du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$ ; c'eſt-à-dire, $aa = xx + yy$, $yy = aa - xx$, & $y = \sqrt{aa - xx}$ ; donc $ydx = dx\sqrt{aa - xx}$, qui ſera l'élement de l'eſpace indeterminé $PMDC$, dont l'integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ *&c.* eſt = à l'aire $PMDC$.

Maintenant ſi on ſupoſe $a = 1 = x$, alors cette ſerie deviendra $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, *&c.* = à l'aire du quart du cercle $ADC$ ; & en le quadruplant vous aurez la quadrature de tout le cercle entier $ADBA$ ; ou ſi le diametre eſt 1, la même ſerie exprimera l'aire de tout le cercle.

*Autrement.*

Que $AE$, tangente de la moitié de l'arc $AM$, ſoit $=x$ le rayon $AC=1$ : que $AB$, ſoit la tangente de l'arc $AM$. Tirez les ſecantes $CE$, $CB$, & le ſinus $MP$ de l'arc $AM$ : que $pm$, ſoit infiniment proche de $PM$, & du centre $C$, tirez la ſecante $Cb$ par le point $m$ ; & du point $M$, tirez auſſi la perpendiculaire $Mt$ à $pm$, & tirez du point $B$ perpendiculaire à $Cb$, la ligne $Bs$. Fig. 13.

Comme on propoſe ici de trouver l'aire du ſecteur indéfini $ACM$, dont l'élement qui eſt le petit ſecteur $MCm$, doit premierement être trouvé de la maniere ſuivante :

Premierement, la tangente $AB$ de l'arc $BM$, ſera $\frac{2x}{1-xx}$; alors parce que l'angle $ACB$, eſt partagé en deux également par la ligne $CE$, on aura $AE\ (x) : AC\ (1) :: EB\ (\frac{x+x^3}{1-xx}) : CB = \frac{1+x^2}{1+x^2}$. De même, à cauſe des triangles ſemblables, $ACB$, $PCM$ ; $CB\ (\frac{1+x^2}{1-x^2} : AB\ (\frac{2x}{1-x^2}) :: AC\ (1) : PM = \frac{2x}{1+x^2}$, & $CB\ (\frac{1+x^2}{1-x^2}) : AC\ (1) :: CM\ (1) : CP = \frac{1-x^2}{1-x^2}$, d'où on tire $AP = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ; dont la differentielle eſt $\frac{4xdx}{1+xx} = Pp$, ou $Mt$.

De plus le petit triangle $Mmt$, rectangle en $t$, eſt ſemblable au triangle rectangle $CMP$, l'angle $tMm$ étant égal à l'angle $PMC$, & l'angle $tmM$ égal à l'angle $PCM$, comme il eſt facile de le prouver. Ainſi $MP\ (\frac{2x}{1+xx}) : AC\ (1) :: Mt\ (\frac{4xdx}{1+xx}) : Mm = \frac{2dx}{1+xx}$. Ainſi $\frac{1}{2}\ MC\ (1) \times Mm = \frac{dx}{1+xx}$ = à l'aire du petit ſecteur $MCm$, étant l'élement du ſecteur $AMC$ dont l'integrale ſera $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9$, *&c.* = à l'aire du ſecteur indeterminé $AMC$.

Quand la tangente $AE\ (x)$ de la moitié de l'arc $AM$, devient $=1=$ au rayon, alors le ſecteur $ACM$ deviendra un quart de cercle ; & la ſerie précedente qui en exprimoit

l'aire, ſera $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$, *&c.* & quand le diametre du cercle $=1$, l'aire entier du cercle ſera exprimé par cette ſerie.

On trouve plus brièvement cette même ſerie de la maniere ſuivante.

Si $AB=x$, alors $Bb=dx$, & $CB=\sqrt{1+xx}$. Or le petit triangle $BSb$, droit en $S$, eſt ſemblable au triangle $ABC$, l'angle $ABC$ ne differant de l'angle $b$, que d'un infiniment petit ſeulement; ainſi ils ſont ſenſés égaux; donc $CB\ (\sqrt{1+xx}) : AC\ (1) : : Bb\ (dx) : Bs=\frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$: De plus, paree que $Bs$ eſt infiniment petit, $CB$ & $Cs$, ne different entr'eux que d'un infiniment petit ſeulement; ainſi $CB\ (\sqrt{1+xx}) : Bs\ (\frac{dx}{\sqrt{1+xx}}) : : MC\ (1) : Mm=\frac{dx}{1+xx}$; d'où l'on tire le petit ſecteur $MCm=\frac{dx}{2+2xx}=$ à l'élement de l'aire du ſecteur $AMC$; dont l'integrale eſt $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{14}x^7+\frac{1}{18}x^9$, *&c.* $=$ à l'aire dudit ſecteur; de maniere que quand le ſecteur $ACM$, eſt la huitiéme partie du cercle; par exemple, quand la tangente $AB$, $(x)$ eſt $=$ au rayon $AC=1$; alors la même ſerie ſera $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}$, *&c.* qui étant doublée donnera $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$, *&c.* $=$ à l'aire du quart du cercle, comme ci-devant.

## EXEMPLE XI.

28. *Quarrer l'eſpace éliptique; ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire d'un ſegment éliptique indéterminé ACMP, compris par le demi-diametre conjugué AC, l'ordonnée PM, la partie de l'abſciſſe AP, & la partie de l'élipſe CM.*

*Fig. 14.* Nommez $AC$, $a$, $AB$, ou $AD$, $b$, $AP$, $x$, $PM$, $y$; enſuite par la proprieté de l'élipſe on aura $\overline{MP}^2=\overline{AD}^2\times$

$\overline{AB}^2 - \overline{AP}^2$, ou ce qui eſt la même choſe, $yy = \frac{bb \times aa - xx}{aa}$; donc $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$. Par conſéquent $\frac{b}{a}\,dx\sqrt{aa-xx}$ ſera l'élement de l'eſpace $ACPM$, & ſon integrale ſera $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6}$, $\&c.$ = à l'aire $ACPM$.

Maintenant ſi vous ſubſtituez $a$ pour $x$ dans cette ſerie, vous aurez $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$, $\&c.$ = à l'aire du quart $ACD$ de l'élipſe; & ſi $A$ eſt = à l'axe $BD$, alors cette derniere ſerie exprimera l'aire de toute l'élipſe, & ſi $\sqrt{ab} = 1$, on aura pour l'aire de l'élipſe $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, $\&c.$ Ainſi une élipſe eſt égale à un cercle dont le diametre eſt moyen proportionnel entre ſes deux diametres conjugués. Donc une élipſe eſt à un cercle, ayant pour diametre le grand axe de l'élipſe, comme $ab$ à $a^2$, ou comme $b$ à $a$, par exemple, comme le petit axe eſt au grand.

*Autrement.*

*29. Trouver l'aire d'un ſecteur quelconque CAM, d'une élipſe.*

Que $CB$ ſoit le demi-diametre conjugué, & $CA$ la moitié de ſon grand diametre, $MP$, une demi-ordonnée: *Fig. 15.*

Maintenant tirez $mp$ infiniment proche de $MP$, joignez les points $C$, $M$ & $m$, par les lignes droites $CM$, $Cm$; & de $m$, tirez la petite ligne $mH$, perpendiculaire à $MP$, coupant $MP$ en $I$, $CM$ en $H$, & la petite ligne $mK$, perpendiculaire à la ligne $CM$ prolongée.

Cela fait que $AC = a$, $BC = 1$, $AP = x$, $PM\ (y)$ $CM = u$ & $CP = z$.

Or la premiere choſe qu'il faut trouver eſt l'aire du petit triangle $CMm$. Parce que les triangles $CPM$, $HIM$, ſont ſemblables; on aura $PM\ (y) : CP\ (z) :: MI\ (dy) : IH = \frac{z\,dy}{y}$; d'où on tire (à cauſe que $Pp = Im = dx = -dz$) $Hm = \frac{z\,dy}{y} - dz$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables $CMP$, $HKM$; $CM\ (u) : PM\ (y) :: Hm\ (\frac{z\,dy}{y} - dz) :$

$mK = \frac{zdy - ydz}{u}$, qui multiplié par la moitié de la baſe $CM$ ($u$) ; alors l'aire du triangle differentielle $CMm$, ſera $= \frac{zdy - ydz}{2}$ ; & prenant la difference de l'équation de la courbe $\frac{aa - zz}{aa} = yy$, on aura $-\frac{dz}{aay} = dy$. Subſtituant cette valeur de $dy$ dans $\frac{zdy - ydz}{2}$, on aura $\frac{-zzdz}{2aay} - \frac{ydz}{2} = \frac{-zzdz - aayydz}{2aay}$, & ſubſtituant dans cette derniere expreſſion pour $aayy$, ſa valeur $aa - zz$, il viendra $\frac{-zzdz - aadz + zzdz}{2aay} = \frac{-adz}{2ay} = \frac{adx}{2ay}$ ; puiſque $dx = -dz$ : de plus ſubſtituant

Fig. 16. $\sqrt{2ax - xx}$ pour $ay$ ; le triangle $CMm$ ſera $= \frac{adz}{2\sqrt{2ax - xx}}$ = à l'élement du ſecteur $ACM$, de l'élipſe. Et ſi vous faites $\sqrt{2ax - xx} = \frac{n}{x}$ ; alors $x = \frac{2nn}{1 + nn}$, & $dx = \frac{4ndn}{1 + nn}$, & toutes ſubſtitutions faites on trouvera $\frac{adx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \frac{adn}{1 + n.ln}$, dont l'integrale eſt $an - \frac{an^3}{3} + \frac{an^5}{5} - \frac{an^7}{7}$, &c. = au ſecteur de l'élipſe.

Vous trouverez de la même maniere que le ſecteur de l'hyperbole, (*figure 16,*) eſt $an + \frac{an^3}{3} + \frac{an^5}{5} + \frac{an^7}{7}$, &c. & le ſecteur du cercle ſera $= n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7}$, &c. qui devient $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. faiſant $n = 1$.

On peut réſoudre ceci plus briévement de la maniere ſuivante.

Fig. 17. 18. Tirez la tangente $AD$, & continuez $CM$ juſqu'à ce qu'elle coupe la même en $D$ : tirez $Cd$, infiniment proche de $CD$, de $C$, décrivez les petits arcs $Mn$, $De$ ; faites $CB = b$, $CA = a$, $AD = x$, $CD = y$, $CP = z$, à cauſe de la ſimilitude des triangles $CAD$, $Ded$ ; l'angle $A$ differant ſeulement de l'angle $D$ d'un infiniment petit, qu'on peut par conſéquent négliger, & les angles en $e$, & en $A$, étant droits ; on aura $CD\ (y) : AC\ (a) :: Dd\ (dx : DE = \frac{adx}{y}$ ; & par la ſimili-

tude des triangles $CPM$, $CAD$; $AC\ (a) : CD\ (y) :: CP\ (z) : CM = \frac{yz}{a}$, par la même raiſon les ſecteurs $CDe$, $CMn$, étant ſemblables, $CD\ (y) : De\ (\frac{adx}{y}) :: CM\ (\frac{yz}{a}) : Mn = \frac{zdx}{y}$ : or $\frac{1}{2}\ CM \times Mn$ ; c'eſt-à-dire, $\frac{zdx}{2y} \times \frac{yz}{a} = \frac{zzdx}{2a} =$ à l'aire du triangle $CMm$, étant l'élement du ſecteur $CAM$.

De plus, par la nature de la courbe & la ſimilitude des triangles $CPM$, $CAD$, dans l'élipſe, on aura $PM\ (\frac{b}{a}\sqrt{aa-zz}) : CP\ (z) :: AD\ (x) : AC\ (a)$ ; & dans l'hyperbole $PM\ (\frac{b}{a}\sqrt{-aa+zz}) : CP\ (z) :: AD\ (x) : AC\ (a)$, & multipliant les moyens & les extrêmes, on aura $zx = b\sqrt{aa+zz}$, dans l'élipſe, & $zx = b\sqrt{-aa+zz}$ dans l'hyperbole ; par conſequent $zz = \frac{aabb}{bb+xx}$ dans l'élipſe, & $zz = \frac{aabb}{bb-xx}$ dans l'hyperbole, qui étant ſubſtitué dans $\frac{zzdx}{2a}$, donnera $\frac{abbdx}{2bb+2xx}$ dans l'élipſe, & $\frac{abbdx}{2bb-2xx}$ dans l'hyperbole = à l'élement de l'aire du ſecteur $CAM$, dont l'integrale ſera $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb} + \frac{ax^5}{10b^4} - \frac{ax^7}{14b^6}$, *&c.* dans l'élipſe, & $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb} - \frac{ax^5}{10b^4} - \frac{ax^7}{14b^6}$, *&c.* dans l'hyperbole = à l'aire du ſecteur $CAM$ ; & faiſant $CB\ (b) = 1$, la même integrale ſe changera en celle-ci $\frac{1}{2}\ ax - \frac{1}{6}\ ax^3 + \frac{1}{10}\ ax^5 - \frac{1}{14}\ ax^7$, *&c.* dans l'élipſe, & $\frac{1}{2}\ ax - \frac{1}{6}\ ax^3 - \frac{1}{10}\ ax^5 - \frac{1}{14}\ ax^7$, *&c.* dans l'hyperbole. Dans l'élipſe ſi $x = b$, l'aire du ſecteur $CAM$, ſera $\frac{1}{2}\ ab - \frac{1}{6}\ ab + \frac{1}{10}\ ab - \frac{1}{14}\ ab$, *&c.* & quand $x = a$, l'aire du ſecteur $CBM$, ſera de même $= \frac{1}{2}\ ab - \frac{1}{6}\ ab + \frac{1}{10}\ ab - \frac{1}{14}\ ab$ *&c.* dont la ſomme, *par exemple*, $ab - \frac{1}{3}\ ab + \frac{1}{5}\ ab - \frac{1}{7}\ ab$, *&c.* ſera l'aire du quart de l'élipſe $ABC$.

## COROLLAIRE.

Il ſuit que ſi $a=b$, *par exemple*, quand l'élipſe eſt à un cercle; l'aire de ce quarr de cercle, dont le rayon eſt $a$, ſera $aa-\frac{1}{3}aa+\frac{1}{5}aa-\frac{1}{7}aa$, *&c.* & ſi $a=1$, l'aire de ce quart de cercle ſera $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$, *&c.*

On peut trouver l'integrale de l'élemenr $\frac{abbdx}{2bb-2xx}$ du ſecteur hyperbolique en la meſure d'un raport, en la raportant à la ſeconde forme dans les Tables de M. *Cottes*; car faiſant $z=x$, $D=abb$, $\theta=0$, $n=2$, $e=2bb$, $f=-2$, la differentielle dans la ſeconde forme $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{e+zf^n}dz=\frac{abbdx}{2bb-2xx}$, & ſon integrale répondant dans les Tables à $\theta=0$, eſt $\frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$. Or $R\left(=\sqrt{\frac{e}{f}}\right)=b$, $T\left(=z^{\frac{1}{2}n}\right)=x$, & $S\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}\right)=\sqrt{bb-xx}$, d'où $\frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.=\frac{1}{2}ab\left|\frac{b+x}{\sqrt{bb-xx}}\right.=\frac{1}{2}AC\times CB\left|\frac{CB+AD}{\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{AD}^2}}\right.$; c'eſt-à-dire que l'aire du ſecteur hyperbolique $CAM$, eſt égal à la meſure du raport de $CB+AD$, à $\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{AD}^2}$ le triangle $ACB$ en étant le module.

## EXEMPLE XI.

30. *Quarrer l'eſpace AMp, apellé la figure des tangentes.*

La proprieté de cette figure eſt telle, qu'une abſciſſe quelconque $AP$, eſt égale à un arc quelconque ($AP$) d'un cercle, & l'ordonnée correſpondante $PM$, qui la coupe à angles droits, eſt égal à la tangente correſpondante $AT$ de cet arc.

Fig. 19. 20. Tirez la ſecante $CT$, & la ſecante $Ct$ infiniment proche de la premiere; & de $C$, comme centre, & de l'intervale $CT$,

$CT$, décrivez le petit arc $Tc$. Faites le rayon $AC=a$, l'arc $AP$ (= à l'abſciſſe $AP$) $=x$, & la tangente correſpondante $AT$ (= à l'ordonnée correſpondante $pM$) $=y$. Maintenant à cauſe que les triangles $ATC$, $Ttc$, ſont ſemblables, les angles $T$, $t$, ne differant entr'eux que d'un angle infiniment petit ſeulement, & les angles en $A$ & en $C$, étant droits; on aura $TC$ ($\sqrt{aa+yy}$) : $AC$ ($a$) : : $Tt$ ($dy$) : $Tc = \frac{ady}{\sqrt{aa+yy}}$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables $CPp$, $CTc$, on aura $CT$ ($\sqrt{aa+yy}$) : $Tc$ ($\frac{ady}{\sqrt{aa+yy}}$) : : $CP$ ($a$) : $Pp$ ($=dx$): multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $dx\sqrt{aa+yy} = \frac{aady}{\sqrt{aa+yy}}$; & diviſant par $\sqrt{aa+yy}$, on aura $dx = \frac{aady}{aa+yy}$ = à la differentielle de l'abſciſſe $Ap$; & multipliant par $y$, on aura $ydx = \frac{aaydy}{aa+yy}$ = à l'élement de l'eſpace $AMp$; dont l'integrale ſera $yy - \frac{y^4}{4aa} + \frac{y^6}{6a^4} - \frac{y^8}{8a^6} + \&c.$ = à l'aire cherchée.

*Autrement.*

*Par la meſure d'un raport.*

La differentielle $\frac{aaydy}{aa+yy}$ peut être comparée à la premiere forme des Tables de M. *Cottes* : car ſi $z=y$, $n=2$, $\theta=1$, $D=aa$, $e=aa$, $f=1$; la premiere forme qui eſt $\frac{Dz^{\theta n-1}}{e+fz^n}dz$ ſera $= \frac{aaydy}{aa+yy}$ & l'integrale, répondant à $\theta=1$, ſera $\frac{D}{nf}\left|\frac{e+fz^n}{e}\right.$ $= \frac{1}{2}aa\left|\frac{aa+yy}{aa}\right. = \frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}\right.$, qui eſt égal à $\overline{AC}^2\left|\frac{CT}{AC}\right.$. Car mettant $2l$ pour le logarithme du raport de $\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}$, & $m$, pour le module des logarithmes; on aura $\frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}\right.$ (*) $= \frac{1}{2}\overline{AC}^2 \times \frac{2l}{m} = \overline{AC}^2 \times \frac{l}{m}$. Mais par la nature

(*) art. 11.

des logarithmes, $l$ eſt égale au logarithme du raport $\frac{CT}{AC}$;

* art. 11. ainſi $\overline{AC}^2 \times \frac{l}{m}$ eſt (*) $= \overline{AC}^2 \left| \frac{CT}{AC} \right. = \frac{1}{2} \overline{AC}^2 \left| \frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2} \right.$: c'eſt pourquoi l'aire $ApM$, eſt égal à la meſure du raport de la ſecante $CT$, de l'arc $AP = Ap$, au rayon $AC$, ayant le quarré du rayon pour module.

## EXEMPLE XIII.

31. *Quarrer l'eſpace ABpM, apellé la figure des ſecantes.*

Fig. 21. On fait ici l'abſciſſe $Ap$, égale à l'arc $AP$, comme dans l'exemple précedent ; mais l'ordonnée correſpondante $pM$, eſt égale à la ſecante $CT$, & l'ordonnée $AB =$ au rayon $AC$, tout le reſte étant de même que dans l'exemple précedent ſeulement que $CT$ ſoit $= y$. Enſuite par la ſimilitude des triangles $ACT$, $Ttc$, on aura $AT\ (\sqrt{yy-aa}) : AC\ (a) :: tc\ (dy) : Tc = \frac{ady}{\sqrt{yy-aa}}$ ; & à cauſe des ſecteurs ſemblables $CTc$, $CPp$, on aura $CT\ (y) : Tc\ (\frac{ady}{\sqrt{yy-aa}}) :: CP\ (a) : Pp\ (dx)$, & multipliant les extrêmes & les moyens, il viendra $ydx = \frac{aady}{\sqrt{yy-aa}} =$ à l'élement de l'eſpace $ABMp$ ; & ſon integrale ſe trouvera facilement par la meſure du raport, pouvant être réduite à la ſixiéme forme des Tables de M. *Cottes* ; car faiſant $z = y$, $n = 2$, $\theta = 0$, $D = aa$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{\sqrt{e+fz^n}} dz = \frac{aady}{\sqrt{-aa+yy}}$. De même dans cette forme $R(=\sqrt{f}) = 1, T(= \frac{fz^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{e+fz^n}}) = \frac{y}{\sqrt{-aa+yy}}$, & $S(=\sqrt{\frac{-f}{e+fz^n}}) = \frac{a}{\sqrt{-aa+yy}}$ ; d'où l'integrale ($\theta$ étant $= 0$) $\frac{2f}{2} D R \left| \frac{R+T}{S} \right.$, ſera $aa \left| \frac{y+\sqrt{-aa+yy}}{a} \right. = \overline{AC}^2 \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$.

Par conſéquent l'aire de l'eſpace $ABMp$, eſt égale à la meſure du raport de la ſomme de la tangente & ſecante du même arc, & du rayon au quarré du rayon comme module.

## COROLLAIRE.

On peut calculer par ce moyen dans les Cartes de *Mercator*, les parties méridionales pour une latitude donnée quelconque $AP$. Il eſt bien démontré, (*) que les parties méridionales d'une latitude quelconque $AP$, ſont à la longueur de l'arc $AP$, comme la ſomme des ſecantes de ces parties méridionales, eſt à la ſomme d'autant de demi-diametres; c'eſt-à-dire, comme l'eſpace curviligne $ABMp$, eſt au rectangle de $BA \times pA$; ou comme $\overline{AC}^2 \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$ eſt à $AC \times AP$; ou, comme $AC \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$, eſt à $AP$. D'où il ſuit que les parties méridionales ſont égales à $AC \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$ (*), ou $AC \left| \frac{AC}{CT-AT} \right.$.

(*) *V. les Tranſact. Philoſoph. de Londres, n° 176.*

(*) *art. 14.*

## EXEMPLE XIV.

32. *Trouver l'aire de l'eſpace CPQc, contenu ſous les parties des conchoïdes de Nicomede CPD, cqd, la partie Cc, de la ligne droite AC tirée du pole A, perpendiculaire à l'aſymptote commune BG, & la partie QP d'une ligne droite quelconque tirée du même pole A, compriſe entre les deux courbes.*

Que $Ac = a$, $cB = CB = b$, $cC = 2b$, $AB = c$, $AG = y$, $BG = x$. Tirez $Ap$ infiniment proche de $AP$; & de $A$, comme centre, décrivez les petits arcs concentriques $qs$, $mr$, $pn$. Maintenant par la proprieté de ces courbes $BC$, ou $Bc$, $= GP$, ($pm$) ou $GQ$ ($mq$): parce que les triangles $AGB$, $rGm$, ſont ſemblables, l'angle en $G$ étant commun, & les angles en $r$ & en $B$ étant droits, (l'arc $rm$, pouvant être pris pour une ligne droite) on aura $AG\,(y) : AB\,(c) :: GM\,(dx) : rm = \frac{cdx}{y}$. De plus, à cauſe des ſecteurs ſemblables

Fig. 22.

$Arm$, $Asq$, on aura $Am=AG\ (y) : rm\ (\frac{cdx}{y}) :: Aq=A\mathcal{Q}$ $=AG-A\mathcal{Q}\ (y-b) : sq=\frac{cydx-cbdx}{yy}$, & de même les ſecteurs ſemblables $Arm$, $Anp$; donneront $AG\ (y) : rm\ (\frac{cdx}{y}) :: AP\ (y+b) : pn=\frac{cydx+cbdx}{yy}$; par conſéquent $pn+qs=\frac{2cdx}{y}$; ainſi $\frac{1}{2}\overline{pn+qs}\times P\mathcal{Q}=\frac{2cbdx}{y}=$ à l'aire du petit eſpace $sPpq$, $=$ à l'eſpace $\mathcal{Q}Ppq=$ à l'élement de l'eſpace $CP\mathcal{Q}c$ : & ſubſtituant $\sqrt{cc+xx}$ pour $y$, la differentielle ſera $\frac{2cbdx}{\sqrt{cc+xx}}$, qui convient à la ſixiéme forme des Tables de M. *Cottes* : car faiſant $D=2cb$, $z=x$, $\theta=0$, $n=2$, $e=cc$, $f=1$, ladite ſixiéme forme $\frac{Dz^{(n+\frac{1}{2}x-1}}{\sqrt{e+fz^n}}dz$, deviendra $\frac{2cbdx}{\sqrt{cc+xx}}$, dont l'integrale ($\theta$ étant $=0$) ſera $\frac{2}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$ : & faiſant $R\ (=\sqrt{f})=1$, $T\ (=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}})=\frac{1}{x}\sqrt{cc+xx}$, & $S\ (=\sqrt{\frac{e}{z^n}})=\frac{c}{x}$, la même integrale deviendra $2bc\left|\frac{x+\sqrt{cc+xx}}{c}\right.=$ à l'integrale de la differentielle donnée égale à l'aire de l'eſpace $CP\mathcal{Q}c=Bc\times AB\left|\frac{BG+AG}{AB}\right.$, c'eſt-à-dire, que l'aire dudit eſpace eſt égale au rectangle de $Bc$, & de la meſure du raport de $BG+AG$, & $AB$ au module $AB$.

*Mais pour trouver l'aire de l'eſpace CPGB, contenu par la partie PC, d'une des conchoïdes de* Nicomede, *BE étant l'aſymptote, A le pole, & ABC perpendiculaire à BE.*

Fig. 23. Nommez $AB$, $a$, $BC$, $b$, $AG$, $y$, $AB$, $x$ : tirez $Ap$, infiniment proche de $AP$, & de $A$ décrivez les petits arcs $mr$, $pn$; enſuite raiſonnant comme ci-deſſus, on aura $\frac{abbdx}{2aa+2xx}+\frac{abdx}{\sqrt{aa+xx}}=$ à l'aire du petit eſpace $GPpm=$ à l'élement de l'eſpace $CPGB$. La premiere partie de cette differentielle ſe réduit à la ſeconde forme des Tables de M. *Cottes*;

cat faiſant $D=abb$, $z=x$, $\theta=0$, $n=2$, $e=2aa$, $f=2$; la differentielle de cette ſeconde forme qui eſt $\frac{Dz^{\theta_n+\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}dz$, deviendra $\frac{abbdx}{2aa+2xx}$; dont l'integrale ſera $\frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$; dans laquelle ſubſtituant pour $R\left(=\sqrt{\frac{e}{f}}\right)\sqrt{-aa}$, pour $T\left(=z^{\frac{1}{2}n}\right)x$, & pour $S\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}\right)\sqrt{aa+xx}$, on aura $\frac{1}{2}bb\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$ pour l'integrale de la premiere partie $\frac{abbdx}{2aa+2xx}$; de même la ſeconde partie de la differentielle, qui eſt $\frac{abdx}{\sqrt{aa+xx}}$, peut ſe comparer à la ſixiéme forme des Tables de M. *Cottes*, en faiſant $D=ab$, $z=x$, $\theta=0$, $n=2$, $e=aa$, $f=1$; dont l'integrale eſt ($\theta$ étant $=0$) $\frac{2}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, laquelle faiſant $R=1$, $T=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, & $S=\frac{a}{x}$, deviendra $ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$. Ainſi la ſomme de ces integrales $\frac{1}{2}bb\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.+ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$ ſera l'integrale de toute la differentielle; conſiſtant en deux parties, dont la premiere eſt la meſure d'un angle quelconque, parce que $R=\sqrt{-aa}$; & la ſeconde celle d'un raport, à cauſe que $R=\sqrt{1}=1$.

La conſtruction de cette integrale peut ſe faire ainſi : tirez $CF$, perpendiculaire à $AC$, prenez $BH$, égale à la meſure du raport de $BG+AG$, & $AB$ à $AB$ pris pour module, c'eſt-à-dire, faites $BH=a\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$. *Fig. 24.*

De plus prenez $BI$, égale à la meſure de l'angle $GAB$, au même module $AB$, c'eſt-à-dire $=a\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$, dont le rayon, tangente & ſecante, ſont toujours comme $a$, $x$, & $\sqrt{aa+xx}$, ou comme $AB$, $BG$, $AG$. Cela fait, tirez $AIE$, & $HD$, parallele; vous aurez par-là le trapeze $BHDC$, égal à toute l'integrale, & par conſéquent égal à l'eſpace $CPGB$ :

car puiſque les triangles $ABH$, $ACD$, ſont ſemblables, on aura $AB\ (a) : BI\ (a\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.) :: AC\ (a+b) : CE = a\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + b\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$; & $\frac{\overline{CE+IB}}{2} \times BC = \frac{ab}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + \frac{bb}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$ = au trapeze $BIEC$. De plus, $HI$, $(= BH - BI) = a\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. - a\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$; qui multiplié par $BC$ $(b)$, & le produit $ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. - ab\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$ ( = au parallelograme $HDEI$) qui étant ajoûté au trapeze $BIEC$, donnera $\frac{ab}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + \frac{bb}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. - \frac{ab}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. = \frac{bb}{2}\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$ = à l'integrale qu'il falloit conſtruire égale au trapeze $BHDC$.

*Fig. 23.* Si la conchoïde $CPD$, eſt de telle nature, que $AB \times BC\ (ab) = AG \times GP\ (yb)$; en ſuivant le même raiſonnement qu'on a déja fait, on aura $\frac{a^2by^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}} + \frac{a^2bb^{-1}dy}{2\sqrt{yy-aa}}$, pour l'aire du petit eſpace $GPpm$ = l'élement de l'eſpace $GPCB$; & les integrales de chaque partie de cette differentielle, peuvent ſe trouver comme l'on a trouvé celles de la differentielle qui ſe raporte à la 5e forme des Tables de M. *Cottes*.

Car faiſant $D = aab$, $z = y$, $\theta = 0$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, la differentielle de cette cinquiéme forme, par exemple, $\frac{Dz^{\theta n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}dz$ deviendra $\frac{aaby^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}}$ pour la premiere partie de la differentielle, & faiſant $D = \frac{a^2bb}{2}$, $z = y$, $\theta = 1$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura ſuivant ladite forme $\frac{a^2bby^{-1}dy}{2\sqrt{yy-aa}}$, pour la ſeconde & derniere partie de la differentielle; & l'integrale dans le premier cas qui répond à $\theta = 0$, ſera $\frac{-2}{ne}\left|\frac{R+T}{S}\right.$, & dans le dernier cas répondant à $\theta = -1$, l'in-

tegrale ſera $\frac{-1}{nz^n} DP + \frac{f}{nz} DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$. Par conſéquent mettant à la place de $P\ (= \sqrt{e+fz^n})\ \sqrt{yy-aa}$, pour $R$ $(= \sqrt{e})\ \sqrt{-aa}$, pour $T\ (= \sqrt{e+fz^n})\ \sqrt{yy-aa}$, & pour $S\ (= \sqrt{fz^n})\ y$; la premiere integrale deviendra $ab \left| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y} \right.$, & la derniere ſera $\frac{abb}{4y} \sqrt{yy-aa} + \frac{bb}{4} \left| \frac{a-\sqrt{yy-aa}}{y} \right.$; & la ſomme de ces integrales $\frac{abb}{4y} \sqrt{yy-aa} + ab + \frac{bb}{4} \left| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y} \right.$ = à l'integrale de toute la differentielle ſuſdite, qu'on peut conſtruire de cette maniere.

Faites $AG\ (y) : \frac{1}{2} AB\ (\frac{1}{2} a) :: \frac{1}{2} BC\ (\frac{1}{2} b) : BN = \frac{ab}{4y}$, & *Fig. 24.* $AG\ (y) : GB\ (\sqrt{yy-aa}) :: BN\ (\frac{ab}{4y}) : BM = \frac{ab}{4y} \sqrt{yy-aa}$, & ſi enſuite à $BM$ vous ajoûtez $MO$ = à la meſure de l'angle $BAG$, dont le rayon, tangente & ſecante ſont comme $AB\ (a)$, $BG\ (\sqrt{yy-aa})$ & $AG\ (y)$ au module $AB + \frac{BC}{4}\ (a + \frac{b}{4})$, le rectangle $CB \times BO$, ſera égal à l'integrale $\frac{abb}{4y} \sqrt{yy-aa} + ab + \frac{bb}{4} \left| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y} \right.$ = à l'eſpace $GPCB$.

## EXEMPLE XV.

33. *Soit $DPEB\mathcal{Q}D$ la moitié de la lunule d'*Hypocrate, *$A$ étant le centre de l'arc $D\mathcal{Q}B$, & $C$ le centre de l'arc $DPE$; il faut trouver l'aire de l'eſpace $\mathcal{Q}PEB$, compris par $BE$, partie de la ligne $ACEB$, qui joint les deux centres $A$, $C$; & par les parties $\mathcal{Q}B$, $PE$, des arcs qui forment la moitié de la lunule; & la partie $\mathcal{Q}P$ d'une ligne quelconque $A\mathcal{Q}P$ tirée du centre $A$ du plus grand arc, compris entre leſdits arcs.*

Que $DCF$ ſoit perpendiculaire à $ACE$. Tirez $Agqp$, infiniment proche de $AG\mathcal{Q}P$, & du centre $A$, décrivez les *Fig. 25.* petits arcs $Gr$, $ps$, & joignez les points $P$ & $E$.

Cela fait, ſoit $AC = a$, $CG = x$, $AG = y$. A cauſe des triangles ſemblables $AGC$, $rgG$, on aura $AG\ (y) : AC\ (a) ::$

$Gg\,(dx) : Gr = \frac{adx}{y}$, & parce que les triangles $AGC$, $AEP$, ſont auſſi ſemblables, l'angle $A$, étant commun à tous deux, & l'angle $APE$, dans la demie-circonference étant égal à l'angle droit $ACG$; on aura $AG\,(y) : AC\,(a) :: AE\,(2a) : AP = \frac{2aa}{y}$. De même à cauſe des ſecteurs ſemblables $AGr$, $Asp$, on aura $AG\,(y) : Gr\,(\frac{adx}{y}) :: AP\,(\frac{2aa}{y}) : sp = \frac{2a^2dx}{y^2}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2}\,AP\,(\frac{aa}{y})$ le produit $\frac{2a^4dx}{y^4}$ = à l'aire du petit ſecteur $Aps$ = au petit triangle $ApP$, car ils ne different ſeulement que du petit triangle $pPs$, qui eſt infiniment plus petit que le triangle $Aps$. De plus à cauſe des ſecteurs ſemblables $AGr$, $Asp$, on aura $AG\,(y) : Gr\,(\frac{adx}{y}) :: A\mathcal{Q}\,(a\sqrt{2}) : \mathcal{Q}q = \frac{aadx\sqrt{2}}{yy}$, qui multiplié par $\frac{1}{2}\,A\,(\frac{a}{2}\sqrt{2})$ & le produit $\frac{a^3dx}{yy}$, ſera égale au petit ſecteur ou triangle $A\mathcal{Q}q$, qui étant ſouſtrait de $\frac{2a^4dx}{y^4}$, aire du triangle $ApP$, le reſte $\frac{2a^4dx}{y^4} - \frac{a^3dx}{yy}$ ſera = à l'aire du trapeze $\mathcal{Q}Ppq$, élement de l'eſpace $EP\mathcal{Q}B$ de la lunule.

De plus, à cauſe que $yy = aa + xx$; ce qui donne $xx = yy - aa$: prenant la differentielle de cette équation, on aura $xdx = ydy$ & $dx = \frac{ydy}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{yy-aa}}$, en mettant pour $x$, ſa valeur $\sqrt{yy-aa}$; maintenant ſi on ſubſtituë cette derniere valeur de $dx$ dans la differentielle de l'eſpace de la lunule cherchée, on aura $\frac{2a^3dy}{y^3\sqrt{y-aa}} - \frac{a^3dy}{y\sqrt{yy-aa}} = \frac{2a^3y^{-3}dx}{\sqrt{y-aa}} - \frac{a^3y^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}}$, dont chaque partie ſe raporte à la cinquiéme forme des Tables de M. *Cottes*. Car dans la premiere partie, faiſant $D = 2a^3$, $z = y$, $\theta = -1$, $n = 2$, $c = -aa$, $f = 1$, on aura la differentielle de cette forme $\frac{Dz^{\theta-1}}{\sqrt{c+fz^n}}$ $dz = \frac{2a^3y^{-3}dy}{\sqrt{yy-aa}}$; de même dans la ſeconde partie, faiſant

$D = -a^3$,

$D=-a^1$, $z=y$, $\theta=0$, $n=2$, $e=-aa$, $f=1$, on aura $\frac{Dz^{\theta n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}dz=\frac{-a^1y^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}}$; & l'integrale répondant à $\theta=-1$, ſera $\frac{-1}{ne}DP+\frac{f}{nee}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.=\frac{a^1}{yy}\sqrt{yy-aa}+aa\left|\frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}\right.$, en ſubſtituant $\sqrt{yy-aa}$ pour $P$ ($\sqrt{e+fz^n}$), $a$ pour $R$ ($\sqrt{e}$), $\sqrt{yy-aa}$ pout $T$ ($\sqrt{yy-aa}$), & $y$ pout $S$ ($\sqrt{fz^n}$). Celle qui répond dans les Tables à $\theta=0$, eſt $\frac{-2}{ne}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.=-aa\left|\frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}\right.$, en ſubſtituant les mêmes valeurs. C'eſt pourquoi la ſomme de ces integrales $\frac{a^1}{yy}\sqrt{yy-aa}+aa\left|\frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}\right.-aa\left|\frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}\right.=\frac{a^1}{yy}\sqrt{yy-aa}$, (puiſque les meſures du même angle au module $aa$, ſont l'une affirmative, & l'autre négative, par conſequent ſe détruiſent), = à l'integrale de l'élement de l'eſpace $EP\mathcal{Q}B$ $=EP\mathcal{Q}B$ de la lunule.

On peut conſtruire plus aiſément cette integrale; car ſi on tire une ligne droite du centre $C$ au point $P$, le triangle iſocele $CPE$ eſt = à l'integrale $\frac{a^1}{yy}\sqrt{yy-aa}=\frac{a^1}{yy}x$ (puiſque $x=\sqrt{yy-aa}$) = à l'eſpace $EP\mathcal{Q}B$ de la lunule, comme nous allons le démontrer.

Tirez $PH$ parallele à $GC$, ce qui donneta, à cauſe des triangles ſemblables $AGC$, $APH$; $AG\ (y):AP\ (\frac{2aa}{y}):: GC\ (x):PH=\frac{2aax}{yy}$. Ainſi $\frac{1}{2}PH\ (\frac{aax}{yy})\times CE\ (a)=\frac{a^1x}{yy}=$ à l'integrale qu'il falloit conſtruire = à l'aire du triangle $CPE$, ce qui donne pour l'aire de la demie-lunule $CE\times\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}aa$. De cette maniere on parvient à la quadrature de cet eſpace par le calcul differentiel; ce qu'on peut véritablement démontrer plus brievement par la géometrie ordinaire.

## EXEMPLE XVI.

34. *Quarrer l'eſpace cycloïdale ; ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire d'un ſegment quelconque AMG.*

Fig. 26. Que *APB* ſoit le cercle generateur ; *AP* une ordonnée quelconque, *PM*, l'abſciſſe correſpondante ; que *mp* ſoit infiniment proche de *MP* ; que *PM* touche le cercle generateur en *P*, & *MT* la cycloïde en *M*. Maintenant par la proprieté de la cycloïde, la ſoutangente $PT = PM =$ à l'arc *AP*. Tirez *AG* perpendiculaire à *AB*, & des points *M*, *m*, tirez *MG*, *mg*, perpendiculaire à *AG*.

Préſentement que $AQ = x$, $AB = 1$ : parce que $TP = PM$, l'angle $MTP = PMT$ ; par conſéquent l'angle $TPQ = 2TMP$. Mais la meſure de l'angle *APQ* eſt la moitié de l'arc *AP*, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *TPA* ; donc $APQ = TMP = Mms$. Par conſéquent les triangles *APQ*, *MmS*, étant ſemblables ; $AQ\ (x) : QP\ (\sqrt{x-xx}) :: MS\ (dx) : mS = dx\frac{\sqrt{x-xx}}{x}$, mais $dx\frac{\sqrt{x-xx}}{x}$, réduit en une ſérie infinie, ſera $x^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}dx$ *&c.* = à l'élement de l'ordonnée *QM*, & l'integrale de cette differentielle ; ſçavoir $2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$ *&c.* ſera l'ordonnée *MQ*. Par conſéquent, $QM \times dx$ = à la differentielle de l'eſpace cycloïdale $AMQ = 2x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}dx - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}dx$ *&c.* dont l'integrale ſera $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{13}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$ *&c.* = à l'aire de l'eſpace indéfini de la cycloïde *AMQ*.

Maintenant ſi $mS = gG = \frac{dx\sqrt{x-xx}}{x}$, eſt multiplié par $GM = AQ = x$ ; alors l'élement *GMSG* de l'aire *AMG* ſera $= dx\sqrt{x-xx}$. Or puiſque cette derniere differentielle égale à l'élement du ſegment du cercle *APQ*, l'eſpace *AMG* ſera égal au même ſegment du cercle *APQ* ; & par conſéquent l'aire *ADBC* de toute la cycloïde *ADB*, eſt égal à l'aire du demi-cercle *APB*.

### COROLLAIRE.

Parce que $BD$ eſt égal à la demie-circonference du cercle ; ſi vous l'apellez $p$, & $AB$, $a$ ; alors le rectangle $ABDE = ap =$ à l'aire du demi-cercle $APB$. D'où il ſuit que l'eſpace exterieur de la cycloïde $AEDMA = \frac{1}{4} ap$. C'eſt pourquoi l'aire de la demie-cycloïde $ADB = \frac{3}{4} ap$, $AMDPA = \frac{1}{2} ap$. Par conſéquent l'aire de la cycloïde eſt triple de ſon cercle générateur.

### EXEMPLE XVII.

35. *Quarrer la ciſſoïde de* Diocles ; *ou, trouver l'aire d'un ſegment quelconque APM de cette courbe.*

Que $ADB$ ſoit le cercle generateur, $BH$ l'aſymptote de la courbe ($AI$) ciſſoïdale, coupant à angles droits le diametre $AB$ du cercle ; ſupoſons ce diametre $AB = 1$, l'abciſſe $AP = x$, & l'ordonnée correſpondante $PM$ de la ciſſoïde $= y$. *Fig.* 27.

Maintenant l'équation qui exprimera la nature de cette courbe, ſera $PB \times \overline{PM}^2 = \overline{AP}^3$ ; c'eſt-à-dire, $y^2 - xy^2 = x^3$ ; ainſi $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ ; d'où on tire $y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = x^{\frac{3}{2}} \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$ ; & $ydx = x^{\frac{3}{2}} \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}} dx =$ à l'élement de l'aire $APM$ ; dont l'integrale ſera $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{2.7} + \frac{1.3x^{\frac{9}{2}}}{4.9.} + \frac{1.3.5x^{\frac{11}{2}}}{4.6.11} + \frac{1.3.5.7x^{\frac{13}{2}}}{4.6.8.13}$ *&c.* $= \sqrt{x}$, multiplié par $\frac{2}{5} x^4 + \frac{1}{7} x^6 + \frac{1.3x^8}{4.9.} + \frac{1.3.5x^{10}}{4.6.11.} + \frac{1.3.5.7x^{12}}{4.6.8.13}$ *&c.* $=$ à l'eſpace $APM$ ; & quand $x = 1$, alors la ſerie ſe changera en celle-ci $\frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1.3}{4.9} + \frac{1.3.5}{4.6.11} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13} =$ à l'aire de l'eſpace infini $ABHIA$.

*Autrement.*

Que $AB$ ſoit $= a$, & $PN = z$. Mais par la nature de la courbe $ay^2 - xy^2 = x^3$, & differentiant l'équation, on aura

$2ny dy - 2xy dy - y^2 dx = 3x^2 dx$, & $2n - 2x \times dy = y dx = \frac{3x^2 dx}{y}$. Mais par une autre proprieté de la courbe $x^3 = zy$; ainſi $\frac{x^3}{y} = z$. Préſentement faiſant $a - x = PB = u$; ce qui donnera $2u dy - y dx = 3z dx$; ainſi l'integrale de l'une eſt égale à l'integrale de l'autre : mais $z dx$ eſt l'élement $PNnp$ du ſegment $ANP$ du cercle ; & à cauſe que $u = PB = OM$, & $dy = mR = oO$ ; $mMOo$, eſt l'élement de l'aire $AMOB$, & $y dx$, l'élement de l'aire $AMP$. Quand l'integrale de $u dy$ exprime l'aire de tout l'eſpace ciſſoïdale $ABHIA$, l'integrale de $x dy$ ſera le même aire ; ainſi l'integrale de $2u dy - y dx =$ l'integrale de $u dy$. Par conſéquent, puiſque dans le même cas l'integrale de $z dx$ eſt l'aire du demi-cercle $ANB$, & que l'integrale de $u dy = 3z dx$, tout l'eſpace ciſſoïdale $ABHIA$, ſera triple du demi-cercle générateur $ANB$.

## EXEMPLE XVIII.

36. *Quarrer un eſpace infini HPMI, compris par l'aſymptote PH, par l'ordonnée PM, & par la partie MSI de la courbe logarithmique MI.*

Fig. 28. Nommez la ſoutangente $PT$, $a$, (parce qu'elle eſt une quantité conſtante par la nature de cette courbe) & l'ordonnée $PM$, $y$. Titez l'ordonnée $pm$ infiniment proche, & de $M$ tirez la perpendiculaire $Mq$ à $mq$. Maintenant à cauſe des triangles ſemblables $MTP$, $mMq$ ; $MP\ (y) : TP\ (a) :: mq\ (dy) : Mq = \frac{ady}{y}$ ; ce qui donne $MP \times Mq = y \times \frac{ady}{y} = ady$, pour l'élement de l'aire $IMPH$, dont l'integrale ſera $ay$ ; c'eſt-à-dire, l'aire de l'eſpace infini $IMPH = MP \times PT$.

### COROLLAIRE.

Si l'ordonnée $QS = z$ ; alors l'eſpace infini $ISQH = az$, & par conſequent $SMPQ = ay - az = a \times y - z$ ; c'eſt-à-dire, l'eſpace compris entre deux demies-ordonnées $MP$, $SQ$, la partie de l'abſciſſe $PQ$, & celle de la courbe $MS$ eſt égale à $TP \times PM - SQ$ ; ainſi l'eſpace $BAPM$ eſt à l'eſ-

pace $BMSQ$, comme la difference des ordonnées $AB$, $PM$, eſt à la difference des ordonnées $PM$, $QS$.

## EXEMPLE XIX.

### 37. *Quarrer tout eſpace ſpirale.*

Que le rayon du cercle ſoit $AC=a$, la circonference $=b$, & un arc quelconque $AB=x$, & l'ordonnée correſpondante $CM=y$. Concevez le rayon $Cb$ infiniment proche de $CB$, & tirez le petit arc $ME$. *Fig. 25.*

La proprieté de la ſpirale d'*Archimede*, eſt que $AC \times AB$ = à la circonference $b$ multiplié par $CM$; c'eſt-à-dire, $ax=by$. Ceci étant accordé, le petit arc $ME=\frac{ydx}{a}$, puiſque $CB : Bb :: CM : ME$. Ainſi $\frac{1}{2} CM \times ME =$ l'aire du petit ſecteur $MCE$=au petit eſpace triangulaire $CMm$, élement de l'eſpace ſpirale $=\frac{y^2dx}{2a}$; mais par la nature de la courbe $ax=by$; par conſéquent $\frac{a^2x^2}{b^2}=yy$. Donc ſubſtituant $\frac{a^2x^2}{b^2}$ pour $yy$, dans l'expreſſion differentielle, on aura $\frac{ax^2dx}{2b^2}$; dont l'integrale ſera $\frac{ax^3}{6b^2}$ pour l'aire du ſegment de l'eſpace ſpirale; & ſi au lieu de $x$ on met $b$, égal à toute la circonference, tout l'eſpace ſpirale $=\frac{1}{6} ab$.

De plus, la nature de tous les eſpaces ſpirales circulaires peuvent s'exprimer par cette équation generale $a^m x^n = b^n y^m$, ainſi $\frac{a^m x^n}{b^n}=y^m$, & $\frac{ax^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}=y^2$; donc $\frac{y^2dx}{2a}=\frac{ax^{\frac{n}{m}}dx}{2b^{\frac{n}{m}}}$ Dont l'integrale ſera $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{4n+2m \times b^{\frac{2n}{m}}}$; ainſi mettant $b$ pour $x$, tout l'eſpace ſpirale ſera $\frac{mab}{4n+2m}$.

Il faut remarquer, que ſi l'arc $AB$ eſt à $BM$, comme

l'abſciſſe à l'ordonnée, dans quelques courbes géometriques que ce ſoit, l'eſpace ſpirale peut être quarré par les mêmes moyens que nous avons ſuivis ci-devant. *Par exemple*; que $AB$ ſoit à $BM$, comme l'abſciſſe d'une parabole eſt à ſon ordonnée; & que prenant $p$ pour le parametre $px=a^2-2ay+yy$, & $dx=\frac{2ydy-2ady}{p}$, ce qui donne $\frac{y^2dx}{2a}=\frac{y^2dy-ay^2dy}{ap}$, dont l'integrale ſera $\frac{y^3}{3p}-\frac{y^4}{4ap}$.

On peut de la même maniere trouver l'aire de l'eſpace compris par l'arc $AB$, & la ſpirale $AM$; dont l'élement & le trapeze $BMmb=\overline{Bb+Mm}\times\frac{1}{2}mb$. Mais $Bb=dx$, $Mm=\frac{ydx}{a}$, $mb=a-y$; par conſequent $BMmb\left(\overline{dx+\frac{ydx}{a}}\times\overline{\frac{1}{2}a-y}\right)=\frac{a^2dx-y^2dx}{2a}$.

Maintenant que la courbe ſoit une ſpirale parabolique, ſubſtituez $\frac{2ydy-2ady}{p}$ pour ſon égal $dx$; ce qui donne $\frac{ay^2dy+a^2ydy-y^3dy-a^2dy}{ap}$ pour l'élement de l'eſpace $ABM$, dont l'integrale $\frac{\frac{y^3}{3p}+ay^2}{2p}-\frac{y^4}{4ap}-a^2y$ ſera égal à l'aire de cet eſpace.

## EXEMPLE XX.

38. *Quarrer un eſpace quelconque ACMP, de la quadratrice, compris entre la baze AC, l'abſciſſe AP, l'ordonnée correſpondante PM, & la partie CM de la même quadratrice.*

Fig. 30. Que $Cc$ ſoit le quart du cercle générateur, $A$ le centre: tirez $AmM$, & des points $m$, $M$, abaiſſez les perpendiculaires $me$, $ME$.

Faites $AC=1$, $AP=x$, $PM=y$. Enſuite par la propriété de cette courbe, $AP\ (x)=EM=$ l'arc $Cm$, du quart du cercle. Ainſi, *par la ſcholie premiere, exemple 4 de la*

*derniere ſection*, le ſinus *em*, $= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ *&c.* & le ſinus du complement $Ae = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$ *&c.* Mais à cauſe des triangles ſemblables *Ame*, *APM*, on aura $me\ (1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ *&c.*$) : Ae\ (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$ *&c.*$) :: AP\ (x) : PM\ (y) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$ *&c.*) d'où il ſuit que $ydx = dx - \frac{1}{3}x^2\,dx - \frac{1}{45}x^4\,dx - \frac{2}{945}x^6\,dx$ *&c.* = à l'élement de l'aire *ACMP*, dont l'integrale $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$ *&c.* = à l'aire *ACPM*.

## SECTION IV.

### *Uſage du calcul integral pour trouver la rectification des courbes.*

### PROBLEME.

39. *Rectifier une courbe quelconque ; ou, trouver une ligne droite qui lui ſoit égale.*

Fig. 31. PUiſqu'on peut concevoir une courbe comme formée par un nombre infini de petites lignes droites ; ainſi une de ces lignes étant trouvée par le calcul differentiel ordinaire, c'eſt-à-dire, l'élement de la courbe étant trouvé ; alors la ſomme des élemens, ou, ce qui eſt la même choſe, l'integrale de cette expreſſion differentielle, ſera la longueur d'une ligne droite égale à la ligne courbe.

Maintenant, que $PM$ ($y$ ſoit l'ordonnée, coupant à angles droits l'abſciſſe $AP$ ($x$) d'une courbe quelconque $AM$; & que $TM$ ſoit tangente à la courbe en $M$. Tirez $Pm$ parallele & infiniment proche de $PM$, & du point $M$, tirez $Mm$ perpendiculaire à $pm$, ce qui donne $Pp\ (=Mn)=dx$, & $nm$, $=dy$, & $Mm$, pour la differentielle ou partie infiniment petite de la courbe $AM$, qu'il faut premierement trouver ; ce qui ſe fait ou en trouvant les valeurs de $\overline{Mn}^2$ ($dx^2$), ou de $\overline{mn}^2$, ($dy^2$) par l'équation de la courbe differentiée ; parce que $\overline{dx^2+dy^2}=Mm$. Ou bien en faiſant comme la ſoutangente $TP$, ou l'ordonnée $PM$ ($dy$) eſt à la tangente $TM$ ; ainſi la differentielle de l'abſciſſe $Mn$, ($dx$) ou $mn$, ($dy$) eſt à une quatriéme proportionnelle qui $=Mn$, differentielle de la courbe $AM$. Car le petit triangle rectangle $Mmn$, eſt ſemblable au triangle rectangle $TMP$, & l'integrale

grale de cette differentielle ſera l'arc cherché. Quelques exemples rendront ceci évident.

### COROLLAIRE.

Il ſuit de ce que nous venons de dire que ſi on tire $PQ$, perpendiculaire à la tangente $TM$ ; $PQ$ ou $QM : PM\ (y) :: Mn\ (dx)$ ou $nm\ (dy) : Mm$, differentielle de la courbe $AM$.

### EXEMPLE I.

40. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AM, de la parabole ordinaire.*

En ce cas on a $AP \times a = \overline{PM}^2$ ; c'eſt-à-dire, $ax = yy$ ; differentiant chaque membre de l'équation, on aura $adx = 2ydy$, & quarrant chaque membre $aadx^2 = 4y^2dy^2$, & $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{aa}$, & ajoûtant $dy^2$, à cette derniere expreſſion, il viendra $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dy^2+\frac{4y^2dy^2}{aa}} = \frac{dy}{a}\sqrt{aa+4yy} = Mm$, differentielle de la courbe $AM$, dont l'integrale ſera $y+\frac{2y^3}{3a^2}-\frac{2y^5}{5a^4}+\frac{4y^7}{7a^6}-\frac{10y^9}{9a^8}$ &c. = à l'arc $AM$. *Fig.* 31.

*Autrement.*

*Par la meſure d'un raport.*

Cette même differentielle de la parabole $\frac{dy}{a}\sqrt{aa+4yy}$ peut ſe raporter à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*. Faites $z=y$, $n=2$, $\theta=0$, $D=\frac{1}{a}$, $e=aa$, $f=4$ ; ce qui donne $Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt{e+fz^n} = \frac{dy}{a}\sqrt{aa+4yy}$, & l'integrale de cette forme, qui répond à $\theta=0$, ſera $\frac{z^n}{n}DP+\frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, & faiſant $P\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y}\sqrt{aa+4yy}$, $R\ (=\sqrt{f}) = 2$, $T\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y}\sqrt{aa+4yy}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right) =$

$\frac{a}{y}$, la même integrale ſera $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.$ qu'on peut conſtruire de cette maniere.

Fig. 32. Du ſommet $A$, tirez $AB$, coupant l'ordonnée $PM$ $(y)$ en $B$; ce qui donne $AB\,(=\sqrt{AP^2+PB^2})=\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}$, & multipliant le numerateur & le dénominateur du raport $\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}$ par $\frac{y}{2a}$; elle ſe changera en celle-ci $\frac{\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}}{\frac{1}{2}y}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=\frac{a}{4}\left|\frac{\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}}{\frac{1}{2}y}\right.$.

Mais $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}=AB+PB$, & $\frac{1}{2}y=PB$, ainſi $\frac{a}{4}$ eſt égal à la diſtance du foyer, ſuivant la nature de la parabole. C'eſt pourquoi $\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=AF\left|\frac{AB+AP}{PB}\right.$ = à la meſure du raport de $AB+AP$ & $PB$, à la diſtance du foyer $AF$, comme module. Ce qui étant ajoûté à $AB$, le tout ſera $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4y^2}+\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=$ à l'integrale de la differentielle $\frac{dy}{a}\sqrt{aa+4yy}=$ à la longueur de l'arc $AM$ de la parabole, d'où on tire cette regle pour trouver la longueur de la courbe de la parabole ordinaire.

Soit $A$ le ſommet, $F$ le foyer, $AP$ l'axe, & $PM$ une ordonnée à cet axe. Tirez $AB$ coupant l'ordonnée $PM$ au point $B$; prolongez-là juſqu'en $C$; en ſorte que $BC$ ſoit la meſure du raport de $AB+AP$, & $PB$, au module $AF$; ce qui donne $AC$, pour la longueur de l'arc $AM$ de la parabole. C'eſt-là la conſtruction que M. *Cottes* donne dans ſon *Harmonia menſurarum, page* 12.

Dans cette courbe la ſoutangente $TP=2AP=2x$, d'où $TM=\sqrt{4xx+ax}$. C'eſt pourquoi $TP\ (2x):TM\ (\sqrt{4xx+ax}):: Mn\,(dx): Mm=\frac{\sqrt{4xx+ax}}{2x}\times dx=$ à l'élément de la courbe. Or puiſque $ax=yy$, donc $x=\frac{yy}{a}$ & $2x$

$= \frac{2yy}{a}$, & $4xx = \frac{4y^4}{aa}$. Par conſéquent $\frac{\sqrt{4y^4+yy}}{aa} = TM$. Maintenant $PM\ (y) : TM\ (\frac{\sqrt{4y^4}}{aa}+yy) :: nm\ (dy) : Mm = dy\frac{\frac{\sqrt{4y^4}}{aa}+yy}{y} = dy\frac{\sqrt{aa+4yy}}{a}$, comme ci-devant; & l'integrale de $dx\frac{\sqrt{4xx+ax}}{2x}$, ſupoſant $a=1$, ſera $x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{9}\sqrt{x^9}$ &c.

## COROLLAIRE.

Si $AC$, $DC$ ſont deux demies axes conjugués d'une hyperbole équilaterale, & qu'on ſupoſe $AC\ (=DC) = a$, parametre de la parabole; ſoit l'ordonnée $PM = 2y$, l'abſciſſe $QM = x$: ce qui donne $AP = x - a$, & parce que $PC \times AP = \overline{PM}^2$; c'eſt-à-dire, $xx - aa = 4yy$; donc $xx = 4yy + aa$. Par conſéquent $x = \sqrt{4yy+aa}$. Et ſi on tire $qm$ infiniment proche de $QM$, on aura $Qq = dy$; ainſi la differentielle $QqmM$ de l'aire hyperbolique $CQMA$ ſera $dy\sqrt{aa+4yy} =$ à l'élement de la parabole. Par conſéquent la rectification de la parabole dépend de la quadrature de cet eſpace hyperbolique: & de même la rectification d'une courbe quelconque peut ſe raporter à ſa quadrature, en ſupoſant la differentielle, ou l'élement de la courbe qu'il faut rectifier, comme une ordonnée, & la quantité changeante de cette differentielle comme une abſciſſe à cette ordonnée. Par conſéquent on peut quelquefois rectifier les courbes d'une maniere plus abregée lorſqu'on connoît d'avance la quadrature de la courbe à laquelle on peut la raporter. *Fig.* 31.

## EXEMPLE II.

41. *Rectifier une parabole du ſecond degré; dont l'équation eſt* $ax^2 = y^3$ *(ſupoſant* $a=1$, *)* $x^2 = y^3$.

Puiſque $x^2 = y^3$, donc $2xdx = 3y^2dy$, & $4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$, & $dx^2 = \frac{9y^4dy^2}{4x^2} = \frac{9y^4dy^2}{4y^3}$ ( ſubſtituant $y^3$ pour $ax^2$ )

$= \frac{9}{4} y dy^2$ ; c'eſt pourquoi $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\frac{9}{4} y dy^2 + dy^2}$, (ajoutant $dy^2$ à chaque membre de l'équation $dx^2 = \frac{9}{4} y dy^2$) $= \frac{1}{2}\sqrt{9y dy^2 + 4dy^2} = \frac{1}{2} dy \sqrt{9y+4}$ = à l'élement de la courbe, dont l'integrale eſt $\frac{1}{27} \times 9y+4 \times \sqrt{9y+4}$. Mais pour ſçavoir s'il n'y a rien à ajouter ou à retrancher de cette integrale, faites $y = 0$ ; alors ce qui reſte eſt $\frac{4}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$ ; par conſéquent la longueur de cette courbe ſera (*) $\frac{1}{27} \times 9y+4 \times \sqrt{9y+4} - \frac{8}{27}$.

(*) art. 19.

## COROLLAIRE.

Fig. 31. Soit le parametre de la parabole ordinaire égal 1, $AP = 1$, $PQ = \frac{9}{4} y$ ; ce qui donne $AQ = \frac{9}{4} y + 1$, & à cauſe que le parametre eſt 1, $\overline{QN}^2 \left(= \frac{9}{4} y + 1\right) = \frac{9y+4}{4}$. Par conſéquent $QN = \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}$ ; c'eſt pourquoi $QNnq$, élement ou differentielle de l'eſpace parabolique $PMNQ = \frac{1}{2} dy \sqrt{9y+4}$. Ainſi l'on voit que la longueur de la courbure parabolique du ſecond degré, exprimée par cette équation $ax^2 = y^3$ dépend de la quadrature de la parabole ſimple, ayant la même differentielle pour l'élement de ſon aire, & par conſequent cette rectification peut ſe trouver en termes finis.

## EXEMPLE III.

42. *Rectifier les paraboles de tous les degrés.*

Que le parametre ſoit = 1 ; enſuite le nombre infini des paraboles de tous les degrés s'exprimera par cette équation $y^m = x$, dont la differentielle eſt $my^{m-1} dy = dx$, & en quarrant chaque membre on aura $m^2 y^{2m-2} dy^2 = dx^2$, & ſi pour abreger vous faites $2m-1 = r$, vous aurez $m^2 y^r dy^2 = dx^2$ ; ajoutant de part & d'autre $dy^2$, & extrayant enſuite la racine quarrée de chaque membre, il viendra $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{m^2 y^r dy^2 + dy^2} = dy\sqrt{m^2 y^r + 1}$ = à l'élement de l'arc d'une parabole de quelque degré qu'elle ſoit, dont l'integrale, *par exemple* ; $y + \frac{m^2 y^r + 1}{2.r+1} -$

$\frac{m^4y^{2r+1}}{2.4.2r+1} + \frac{1.3m^6y^{3r+1}}{2.4.6.3r+1} - \frac{1.3.5m^8y^{4r+1}}{2.4.6.8.4r+1}$ &c. est la longueur de cette courbe. Maintenant substituant $2m-2$ pour $r$, on aura pour le même arc, $y + \frac{m^2y^{2m-1}}{2.2m-1} - \frac{m^4y^{4m-3}}{2.4.4m-3}$ $+ \frac{1.3m^6y^{6m-5}}{2.4.6.6m-5} - \frac{1.3.5m^8y^{8m-7}}{2.4.6.8.8m-7}$ &c.

## EXEMPLE IV.

43. *Trouver la longueur d'une partie quelconque BC de la spirale équiangulaire ou logarithmique.*

Supose le rayon $AB=a$, $AC=b$; que $BD$ $(c)$ touche la spirale en $B$, & que $AD$ soit perpendiculaire à $BD$. Nommez $BD$, $p$; que $PE$ touche de même la spirale en $P$, & que $AE$ lui soit perpendiculaire. De plus, que $Ap$ soit infiniment proche de $AP$; du point $A$ décrivez le petit arc $Pm$; ensuite faites $AP-AB=FP$, $y$. *Fig.* 33.

Or par la proprieté de cette courbe, un rayon quelconque $AB$, la coupe toujours dans un même angle; c'est-à-dire, fait toujours un même angle $ABD$ avec la tangente $BD$; donc un triangle quelconque $APE$, est semblable au triangle donné $ABD$. Mais le petit triangle $mpP$ est aussi semblable au triangle $APE$, l'angle en $m$ étant droit $=E$, & l'angle en $p$ étant commun aux deux triangles; d'où il suit que le petit triangle differentiel $mpP$ est semblable au triangle $ABD$; d'où on tire $BD\ (c) : AB\ (a) :: mp\ (dy) : Pp = \frac{ady}{c}$ = à l'élement de la partie $PB$ de la courbe; & l'integrale $\frac{ay}{c}$ est la longueur de la partie $PB$; & mettant $b-a$ pour $y$, on aura $\frac{ba-aa}{c}$ = à la longueur $BC$; c'est-à-dire, que $BD\ (c) : AB\ (a) :: AC-AB$ : à la longueur $BC$.

## EXEMPLE V.

44. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AP, de la ſpirale APC d'*Archimedes.

*Fig.* 34. Que *CAM* ſoit le cercle generateur. Nommez *AC a*, la circonference *b*, l'arc *CM x*, l'ordonnée *AP* de la ſpirale *y*, & que *PT* touche la ſpirale en *P*; coupant la ligne *AT* tirée du centre *A* de la ſpirale, perpendiculaire à *AP* dans le point *T*. De plus, que $Mm=dx$, tirez *Am*, & de la diſtance *An*, & du centre *A*, décrivez le petit arc *np*. Maintenant $ax=by$, exprime la nature de cette courbe. A cauſe des ſecteurs ſemblables *AMm*, *Apn*; on aura *AM* (*a*) : *Mm* (*dx*) :: $Ap=AP$ (*y*) : $Pn=\frac{ydx}{a}$, & parce que les triangles *Ppn*, *PAT*, ſont auſſi ſemblables; on aura *pP* (*dy*) : *pn* ($\frac{ydx}{a}$) :: *AP* (*y*) : *AT* ſoutangente $=\frac{yydx}{ady}$. Mais $adx=bdy$; donc $dx=\frac{bdy}{a}$, en ſubſtituant cette valeur de *dx*, dans $\frac{yydx}{ady}$ on aura $AT=\frac{byy}{aa}$. De plus, à cauſe que le triangle *TAP* eſt rectangle, $\overline{AT}^2$ ($\frac{bbyy}{a^4}$) $+\overline{AP}^2$ ($yy$) $=\overline{TP}^2=\frac{a^4yy+bbyy}{a^4}$; ainſi $TP=\frac{y}{aa}\sqrt{a^4+bbyy}$; & *AP* (*y*) : *TP* ($\frac{y}{aa}\sqrt{a^4+bbyy}$) :: *pP* (*dy*) : $Pn=\frac{1}{aa}dy\sqrt{a^4+bbyy}$ = à l'élcment de la partie *AP* de la ſpirale, qui ſe raporte à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*.

Car faiſant $z=y$, $n=2$, $\theta=0$, $D=\frac{1}{aa}$, $e=a^4$, $f=bb$, on a $Dz^{(\eta+\frac{1}{2}\eta-1}dz\sqrt{e+fz^n}=\frac{1}{aa}dy\sqrt{a^4+bbyy}$, dont l'integrale eſt $\frac{z^n}{n}DP+\frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, & mettant pour *P*, *R*, *T*, *S*; ou pour $\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$, $\sqrt{f}$, $\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}$, $\sqrt{\frac{e}{z^n}}$, leurs valeurs $\frac{1}{y}\sqrt{a^4+bbyy}$, $b$, $\frac{1}{y}\sqrt{a^4+bbyy}$, $\frac{a^2}{y}$; alors il viendra $\frac{y}{2aa}\sqrt{a^4+bbyy}+\frac{aa}{2b}\left|\frac{\sqrt{a^4+bbyy}+yb}{aa}\right.$ = à l'integrale de la differentielle dont nous venons de parler.

On peut conſtruire ainſi cette integrale : coupez *AP* (*y*)

dans le point $L$, & tirez $DL$, parallele à la tangente $PT$, coupant la ſoutangente en $D$; ce qui donne $DL = \frac{1}{2aa}\sqrt{a^4+bbyy}$, puiſqu'il eſt égal à $\frac{1}{2}\ PT = \frac{1}{2aa}\sqrt{a^4+bbyy}$. De plus le module $\frac{aa}{2b}$ ſe trouve en faiſant $AD\ (\frac{byy}{2aa}) : AL\ (\frac{1}{2}) :: AL\ (\frac{1}{2}) : AF = \frac{aa}{2b}$, & le raport $\frac{\sqrt{a^4+bbyy}+yb}{aa} = \frac{1}{2aa}\sqrt{a^4+bbyy} + \frac{by^2}{2aa}$, comme l'on trouvera en diviſant le numerateur & le dénominateur de cette derniere expreſſion par $\frac{1}{2}$; ainſi ce raport $= \frac{LD+AD}{AL}$. De même, ſi à $DL$, vous ajoutez $L\mathcal{Q}$, qui eſt la meſure du raport de $LD+AD$ à $AL$, la ligne $DF$ en étant le module; toute la ligne $D\mathcal{Q}$ eſt égale à la longueur $AP$ de la ſpirale.

De cette maniere vous pouvez trouver la longueur de toute la ſpirale, en faiſant $y = a$, qui eſt le rayon du cercle generateur.

## EXEMPLE VI.

45. *Trouver la longueur d'un arc quelconque CP de la ſpirale réciproque APC.*

Autour du centre $A$, & de la diſtance $AC$, décrivez le quart de cercle $BCMH$, & continuez $AP$ en $M$. Or par la nature de cette courbe un de ſes rayons quelconque $AC$ eſt réciproquement comme l'angle $BAC$ qu'il fait avec le premier rayon $AB$, ou comme l'arc $BC$; c'eſt-à-dire, que $AP : AC :: BC : BM$; ainſi $AP \times BM = AC \times BC$. *Fig.* 35.

Maintenant faites $AB$ ou $AC = a$, & l'arc $Bc = b$, l'arc $BM = x$, & $AP = y$; & l'on aura $ab = xy$. Tirez $PG$ juſqu'à ce qu'elle touche la courbe en $P$, & tirez auſſi $AG$ perpendiculaire à $AP$. Supoſez $Ap$ infiniment proche de $AP$, & continuez-la juſqu'à ce qu'elle coupe l'arc du cercle en $m$, & de $A$, & de la diſtance $Ap$, décrivez le petit arc $pn$; à cauſe des ſecteurs ſemblables $Anp$, $AMm$; $AM\ (a) : Mm\ (dx) :: AP\ (y) : pn = \frac{ydx}{a}$; & de même à cauſe de la ſimilitude des triangles $APG$, $nPp$, on a $Pn\ (dy) : pn\ (\frac{ydx}{a}) ::$

$AP\ (y) : AG = \frac{y^2 dx}{a dy}$ ; differentiant l'équation de la courbe $ab = xy$ ; on aura $dx = \frac{ab dy}{yy}$, qui étant ſubſtitué pour $dx$ dans $\frac{yydx}{ady}$, viendra $AG = b$ ; c'eſt-à-dire, égale à la ligne tirée du centre $A$, perpendiculaire à un rayon quelconque $AP$ de la ſpirale, qui coupe ſa tangente à l'extremité du rayon, ſera une grandeur conſtante, *par exemple*, = à l'arc $BC$, qui eſt égal à une ligne droite, perpendiculaire au premier rayon $AB$, quand le point $C$ eſt à une diſtance infinie, & l'angle $BAC$ infiniment petit ; c'eſt-à-dire, égale à $AD$ diſtance de l'aſymptote $DE$ du centre $A$. Ainſi $AP\ (y)$ : $GP\ (\sqrt{bb+yy}) :: nP\ (dy) : Pp = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy}$ = à l'élement de la courbe $AP$.

Cet exemple peut être raporté à la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*. Car faiſant $z = y$, $n = 2$, $\theta = 0$, $D = 1$, $e = bb$, $f = 1$, on a $Dz^{n-1}\,dz\,\sqrt{e+fz^n} = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy}$, & ſon integrale $\frac{1}{n}DP - \frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, en ſubſtituant pour $P\ (\sqrt{e+fz^n})\sqrt{bb+yy}$, pour $R\ (=\sqrt{e})b$, pour $T\ (=\sqrt{e+fz^n})\sqrt{bb+yy}$, & pour $S\ (=\sqrt{fz^n})y$, ſera $= \sqrt{bb+yy} - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}\right.$ ; & ſi $AC$, ſupoſé invariable $= z$, alors l'integrale $\sqrt{bb+zz} - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}\right.$ = l'arc $APC$ ; & la difference de ces integrales, par exemple, $\sqrt{bb+zz} - \sqrt{bb+yy} + b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}\right. - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}\right. = CF - PG + AF\left|\frac{AF+PG}{AP}\right. - AF\left|\frac{AF+CF}{AC}\right.$ = à la longueur de la partie $PC$ de la courbe ; c'eſt-à-dire, que ſi à la difference $CF - PG$ des tangentes, vous ajoutez la difference des meſures du raport de $AF + PG$ & $AP$, au module $AF$, & du raport de $AF + CF$ & $AC$, au même module $AF$, le tout ſera la longueur de la partie $PC$ de la courbe.

Or parce que $AF\left|\frac{AF+PG}{AP}\right. = AF\left|\frac{AP}{PG-AF}\right.$, & $AF\left|\frac{AF+CF}{AC}\right. = AF\left|\frac{AC}{CF-AF}\right.$, (*par la ſcholie, art.* 14.) par conſéquent

quent ſi $LM$ eſt la meſure du raport de $AC$ & $CF-AF$, au module $AF$, & de même $lm$, la meſure du raport de $AP$ & $PG-AF$, au module $AF$; la ſomme des differences des tangentes $CF-PG$, & la difference des meſures $lm-LM$, ſera = à la longueur de la partie $PC$ de la ſpirale.

## EXEMPLE VII.

46. *Trouver la longueur de l'arc CP de la courbe logarithmique CPG.*

Que $AC$, $aP$ ſoient les ordonnées perpendiculaires à l'aſymptote $Af$, & que $CF$, $Pf$, ſoient les tangentes : de même que $n$ ſoit infiniment proche de $P$, tirez $np$ parallele à $af$. *Fig. 36.*

Nommez $AC$, $z$, $aP$, $y$, & la ſoutangente invariable $AF$, ou $af$, $b$. Maintenant à cauſe de la ſimilitude des triangles $aPf$, $nPp$, on a $AP\ (y) : fP\ (\sqrt{bb+yy}) :: nP(dy) : Pp = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy}$ = l'élement de la partie infinie $PG$ de la courbe, qui étant comparé à la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*, donne pour integrale (comme dans le dernier probleme) $\sqrt{bb+yy} - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}\right.$. De la même maniere on trouvera que l'élement de la partie infinie $CPG$, eſt $\frac{dz}{z}\sqrt{bb+zz}$; & pour ſon integrale $\sqrt{bb+zz} - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}\right.$; & la difference de ces integrales, *par exemple*, $\sqrt{bb+zz} - \sqrt{bb+yy} + b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z} - b\right|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y} = CF - Pf + AF\left|\frac{AF+Pf}{AP} - AF\right|\frac{AF+CF}{AC}$, ou (*) $= CF - Pf + AF\left|\frac{aP}{Pf-AF} - AF\right|\frac{AC}{CF-AF}$.

Maintenant ſi on prend $AL$ égal à $CF-AF$, & $al$ égal $Pf-AF$, & que $LM$, $lm$, ſoient tirés paralleles à $Af$; alors par la proprieté de la courbe, $LM$ (= l'abſciſſe $An$) ſera le logarithme du raport de l'ordonnée $AC$, à l'ordonnée $Mn$, c'eſt-à-dire, de $AC$ à $AL$; par conſéquent $LM$, eſt le logarithme de $\frac{AC}{CF-AF}$. De même $lm$ eſt le logarithme de ** art. 14.*

$\frac{aP}{Pf-AF}$, & ſupoſant la ſoutangente invariable $AF$, ou $af$ (*b*) égal au module des logarithmes, la ligne $LM$ (*)$=AF\left|\frac{AF+CF}{AC}\right.=AF\left|\frac{AC}{CF-AF}\right.$; & $lm=AF\left|\frac{AF+Pf}{aP}\right.=AF\left|\frac{aP}{Pf-Af}\right.$; c'eſt pourquoi ſi à $cf-Pf$, differences des tangentes, vous ajoutez $lm-LM$, differences des paralleles, le tout ſera égal à la longueur $CP$ de la courbe.

(*) art. 14.

## EXEMPLE VIII.

47. *Le ſinus PM d'un arc quelconque PM d'un cercle, étant donné avec le rayon, trouver la longueur de cet arc.*

Fig. 12. Que $AP=x$, le rayon $AC=1$, & le ſinus ou l'ordonnée $PM=y$; par la proprieté du cercle on a $AP\times PE=\overline{PM}^2$, en termes algebriques $2x-xx=yy$. Differentiant, on aura $2dx-2xdx=2ydy$ & $dx=\frac{ydy}{1-x}$, & quarrant viendra $dx^2=\frac{yydy^2}{1-2x+xx}=\frac{y^2dy^2}{1-y^2}$; car par l'équation de la courbe $2x-xx=yy$; donc $\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{y^2dy^2}{1-y^2}+dy^2}=\sqrt{\frac{y^2dy^2+dy^2-y^2dy^2}{1-y^2}}=\sqrt{\frac{dy^2}{1-y^2}}=\sqrt{\frac{dy}{1-y^2}}=\overline{1-y^2}^{-\frac{1}{2}}dy$, élement de l'arc $AM$; dont l'inregrale eſt $y+\frac{y^3}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}y^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. = à la longueur de l'arc $AM$.

Maintenant ſi l'on nomme le premier terme $A$, le ſecond $B$, le troiſiéme $C$, le quatriéme $D$, &c. & que le ſecond terme ſoit multiplié par $\frac{1}{1}$, le troiſiéme par $\frac{3}{3}$, le quarriéme par $\frac{5}{5}$ &c. la ſerie déja trouvée ſe changera en celle-ci $y+\frac{1}{2\,3}Ay^2+\frac{3}{4.5}\,3\,By^2+\frac{5}{6.7}\,5\,Cy^2+\frac{7}{8.9}\,7\,Dy^2$ &c.

*Autrement.*

Tirez le rayon $CM$, achevez le rectangle infiniment petit

$PMnp$, faites $AB=1$ ; & comme ci-devant $AP=x$, $PM=y$; alors $x-xx=yy$, & à cauſe que le petit triangle rectangle $Mmn$ eſt ſemblable au triangle $PMC$, on aura $PM(\sqrt{x-xx})$: $MC(\frac{1}{2})::Pp$ ou $Mn(dx) : Mm = \frac{1}{2\sqrt{x-xx}}dx = \frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx} \times dx =$ à l'élement de l'arc $AM$ ; dont l'integrale ſera $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}$ &c. $= x^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{112}x^{1}+\frac{35}{1152}x^{4}$ &c.

Si le ſinus du complement $PC$, eſt égal à $x$, & le rayon $Ac=1$ ; alors l'élement $Mm$, de l'arc $CD$, étant le complement de $AM$, au quart de cercle, ſera $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}dx$, ou $\frac{\sqrt{x-xx}}{x-xx}dx$ ; car puiſque par la proprieté du cercle $1-yy=xx$, qui étant differentié ſera $-2ydy=2xdx$, & diviſant chaque membre de l'équation par 2, on aura $ydy=xdx$, & $dy=\frac{xdx}{y}$, & $dy^2=\frac{x^2dx^2}{yy}=\frac{x^2dx^2}{1-xx}$ ; par conſequent $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{\sqrt{x^2dx^2}}{1-xx}+dx^2=dx\sqrt{\frac{1}{1-xx}}$, dont l'integrale eſt $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+$ &c. $=$ à la longueur de l'arc $CD$.

## Scholie I.

Si l'arc $AM$ ($z$) eſt donné dans les ſeries deja trouvées, & qu'il faille trouver le ſinus verſe ou baze $AP$ ($x$) ou le ſinus $MP$. Pour trouver le ſinus verſe, extrayez la racine quarrée de cette équation (*) $z=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$ &c. * art. 3. $AP$ étant $=x$ ; & pour trouver le ſinus $Pm$ ; extrayez la racine quarrée de $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$ &c. dans laquelle $PM=x$.

## Scholie II.

Cet exemple nous donne l'éclairciſſement du theoreme de M. *Huguens* pour trouver la longueur d'un arc quelconque $AM$ d'un cercle, ayant la corde $AM$ de cet arc, & la corde $Am$, d'un arc égal à la moitié de la donnée. Voici *Fig. 37.*

le theoreme $\frac{8Am-AM}{3}$ = l'arc $AM$ à peu près.

Nommez le rayon $AC$, $a$, l'arc $AM$, $z$, la corde $AM$, $A$, & la corde $Am$ de l'arc $AM$, $B$. Ce qui donne $A$ ($=mp=$ à deux fois le ſinus de $Am=\frac{1}{2}z$) (*) $=z-\frac{z^3}{4.6aa}$ * art. 3. $+\frac{z^5}{4.4.120a^4}-$ &c. & $B=\frac{1}{2}z-\frac{z^3}{2.16.6aa}+\frac{z^5}{2.16.16.120a^4}$ — &c. Maintenant multipliant $B$, par un nombre quelconque ſupoſé $n$, & du produit ſouſtrayés en $A$, & afin que le ſecond terme $-\frac{nz^3}{2.16.6a}+\frac{z^3}{4.6aa}$ s'évanoüiſſe, faites-le $=0$ ; ce qui donnera $n=8$, ainſi $8B-A=3z$ * $-\frac{3.z^5}{64.120a^4}+$ &c. c'eſt-à-dire, $\frac{8B-A}{3}=z$, l'erreur étant ſeulement de $\frac{z^5}{76800a^4}-$ &c. de trop.

## SCHOLIE III.

Fig. 38. Si la perpendiculaire $AP$ d'un arc $MAm$, eſt prolongée, & qu'il faille trouver dans cette ligne le point $F$, tel qu'ayant mené les lignes $FME$, & $Fme$, elles renferment la partie $Ee$ de la tangente du cercle en $A$, à peu près égale à la longueur de l'arc $Mm$.

Que $C$ ſoit le centre, le diametre $AG=a$, & la perpendiculaire $AP=x$ ; ce qui donne $PM$ ($=\sqrt{ax-xx}$) $=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}}-$ &c. & $AE$ (= l'arc $AM$) $=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6a^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40a^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112a^{\frac{5}{2}}}+$ &c. Mais à cauſe de la ſimilitude des triangles $FMP$, $FEA$ ; on a $AE-PM$ ($\frac{1x^{\frac{3}{2}}}{4a^{\frac{1}{2}}}+\frac{1x^{\frac{5}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^{\frac{7}{2}}}{64a^{\frac{5}{2}}}$ &c.) : $AP$ ($x$) :: $AE$ ($a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6a^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40a^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112a^{\frac{5}{2}}}+$ &c.) : $AF=\frac{3}{2}a-\frac{1}{5}x-\frac{12xx}{175a}$ — ou — &c.

Supoſons maintenant $AF = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ ; enſuite faiſant $AH = \frac{1}{3}AP$, $(x)$ & $GF = HC$, une ligne droite tirée de $F$ par $M$, & un autre par $m$, couperont la partie $Ee$, à peu de choſe près égale à la longueur de l'arc $MAm$ ; l'erreur étant ſeulement de $\frac{2 \times 16x^3}{525a^2} \sqrt{ax}$ + ou — $\&c.$

## Scholie IV.

Si l'on veut l'aire d'un ſegment $MAm$, d'un cercle dont on a beſoin, le plus exactement qu'il ſoit poſſible ; réduiſez-là en une ſerie infinie, *par exemple*, que le ſegment $MAm$ ſoit $= \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36a^{\frac{5}{2}}}$ $\&c.$ à peu près égale à $\frac{2}{3}\overline{AM + PM} \times \frac{2}{5}AP$, l'erreur étant ſeulement de $\frac{x^4}{70a^2}\sqrt{ax}$ + $\&c.$ de moins. Fig. 39.

## Exemple IX.

48. *Rectifier l'élipſe ; ou, trouver la longueur d'une partie quelconque AM de cette courbe.*

Que le demi grand axe $AC$ ſoit $a$, ſon demi conjugué $Cc = b$, $AP = x$, & $PM = y$ ; par la proprieté de la courbe on aura $\frac{\overline{AP \times Pa} \times \overline{Cc}^2}{\overline{AC}^2} = \overline{PM}^2$ ; c'eſt-à-dire, $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax - xx} = yy$ ; & prenant la difference de chaque membre de l'équation, on aura $2adx - 2xdx = \frac{2a^2}{b^2} \times ydy$, ou $adx - xdx = \frac{a^2}{b^2} \times ydy$ ; donc $dx = \frac{\frac{a^2}{b^2}ydy}{\overline{a-x}}$, & quarrant chaque membre $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{a^4b^4 - 2ab^4x + b^4xx}$ ; & puiſque par la proprieté de la courbe $bb \times \overline{2ax - xx} = aayy$, & $b^4 \times \overline{2ax - xx} = aabbyy$ ; ſi on ſubſtituë $aabbyy$ pour ſon égal dans le dénominateur, on aura $dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{a^2b^4 - a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}$, & ajoûtant de part & Fig. 40.

d'autre $dy^2$ ; on aura $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4-b^2y^2} + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2 + b^4dy^2 - b^2y^2dy^2}{b^4-b^2y^2} = \frac{b^4+\overline{a^2-b^2}\times y^2}{b^4-b^2y^2} \times dy^2$ ; & par conſéquent $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4+\overline{a^2-b^2}yy}{b^4-yy}}$ = à l'élement $Mm$, de l'arc $AM$ de l'élipſe ; & ſupoſant $b=1$, $a^2-bb\ (=a^2-1) = c$ ; alors l'élement $Mm$ de cet arc ſera $dy\frac{\sqrt{1+cyy}}{1-yy}$ ; & ſon integrale ſera, ſupoſant $n=1+c$ ; $y + \frac{ny^3}{3.1} + \frac{ny^5}{5.1} - \frac{n^2y^5}{5.2.2.1.} + \frac{ny^7}{7.1} - \frac{n^2y^7}{7.2.2.} + \frac{n^3y^7}{7.2.2.2.2.}$ &c.

Mais pour trouver la longueur de l'arc $MC$ de l'élipſe, on peut s'y prendre de cette maniere ; ſoit $Pc=x$ : & on aura $AC-PC \times \frac{Cc}{AC} = \overline{PM}^2$, c'eſt-à-dire, $aa-xx \times \frac{bb}{aa} = yy$ ; donc $\overline{aa-xx} \times bb = aayy$, differentiant chaque membre de l'équation, on aura $-2bbxdx = 2a^2ydy$, ou $-bbxdx = aaydy$, & $dx = \frac{aaydy}{-bbx}$, & en quarrant chaque membre $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$. Or par l'équation de la courbe on a $x^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$ ; donc $b^4x^2 = aab^4 - b^2y^2$ ; & ſubſtituant $aab^4 - b^2y^2$, pour $b^4x^2$ dans le dénominateur ; & $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{aab^4-a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4-b^2y^2}$, enſuite ajoûtant de part & d'autre $dy^2$, on aura $dx^2 + dy^2 = (\frac{a^2y^2dy^2}{b^4-b^2y^2} + dy^2 = \frac{b^4+a^2y^2-b^2y^2}{b^4-b^2y^2} \times dy^2) = \frac{b^4+\overline{a^2-b^2}\times yy}{b^4-b^2y^2} \times dy^2$ ; c'eſt pourquoi $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\frac{b^4+\overline{a^2-b^2}yy}{b^4-b^2y^2}}dy$ = à l'élement de l'arc $MC$, qui eſt le même que l'élement de l'arc $AM$, quand $AP=x$ ; ainſi l'integrale de celle-ci a la même expreſſion que l'integrale de l'arc $AM$.

Si $aa=a$, & $CP=x$, on aura la longueur de l'arc $MC = \overset{x}{+\frac{bb}{2aa}\times\frac{x^1}{3a}}$ . .

$$+\frac{\frac{b^4}{2aa}-\frac{b^4}{8a^4}\times\frac{x^5}{5a^5}}{+\frac{bb}{2aa}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^6}{16a^6}\times\frac{x^7}{7a^7}}$$

$$+\frac{bb}{2aa}-\frac{b^4}{8a^4}+\frac{3b^6}{16a^6}-\frac{5b^8}{128a^8}\times\frac{x^9}{9a^9},\ \&c.$$

Car $\frac{bb}{aa}\times aa-xx=yy$; & $\frac{b}{a}\times\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}=y$; donc $\frac{b}{a}\times\frac{-xdx}{\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}}=dy$; de même $\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}\times dx^2=dy^2$, par conſequent $1+\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}\times dx^2=dx^2+dy^2$; & l'élement de l'arc $MC$, ſera $\left|1+\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}\right|^{\frac{1}{2}}\times dx$, qui étant réduit en une ſerie infinie, ſera $=1+\frac{1}{2}\times\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}-\frac{1}{8}\times\frac{b^4}{a^4}\times\left|\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^2\times\frac{1}{15}\times\frac{b^6}{a^6}\times\left|\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^3-\frac{5}{128}\times\frac{b^8}{a^8}\times\left|\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^4\right|\right|\right|\&c.\times dx=$

$dx$

$$+\frac{1}{2}dx\times\frac{bb}{aa}\times\overline{\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}},\ \&c.$$

$$-\frac{1}{8}dx\times\frac{b^4}{a^4}\times\overline{\frac{x^4}{a^4}+\frac{2x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}},\ \&c.$$

$$+\frac{1}{16}dx\times\frac{b^6}{a^6}\times\overline{\frac{x^6}{a^6}+\frac{3x^8}{a^8}},\ \&c.$$

$$-\frac{5}{128}dx\times\frac{b^8}{a^8}\times\frac{x^8}{a^8},\ \&c.$$

& l'integrale ſera

$x$

$$+\frac{1}{2}\times\frac{bb}{aa}\times\frac{x^3}{3aa}+\frac{x^5}{5a^4}+\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$

$$-\frac{1}{8}\times\frac{b^4}{a^4}\times\qquad\frac{x^5}{5a^4}+\frac{2x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$

$$+\frac{1}{16}\times\frac{b^6}{a^6}\times\qquad\qquad\frac{x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8},\ \&c.$$

$$-\frac{5}{128}\times\frac{b^8}{a^8}\times\qquad\qquad\qquad+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$

étant égales aux ſeries qu'on a propoſées en premier lieu.

## EXEMPLE X.

49. *Rectifier l'hyperbole ; ou, trouver la longueur de l'arc AM de cette courbe.*

*Fig.* 41. Que le centre ſoit $C$, le grand axe $aA$ ($2a$), ſon demi axe conjugué $Cc$ ($b$), l'abciſſe $AP$ ($x$) & l'ordonnée correſpondante $PM$ ($y$). Maintenant la proprieté de cette courbe eſt telle que $\frac{aP \times AP \times \overline{Cc}^2}{\overline{aA}^2} = \overline{PM}^2$ ; c'eſt-à-dire, que $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax - xx} = yy$, differentiant chaque partie de l'équation, on aura $2adx - 2xdx = \frac{2a^2}{b^2} \times ydy$, ou bien $adx - xdx = \frac{a^2}{b^2} \times ydy$ ; donc $dx = \frac{a^2ydy}{b^2 \times a - x}$ ; & quarrant chaque membre de l'équation $dx^2 = \frac{a^4yydy^2}{a^2b^2 - 2ab^2x + b^2xx}$. Or par la nature de la courbe, $bb \times \overline{2ax - xx} = aayy$, & $b^4 \times 2ax - xx = a^2b^2y^2$ ; ſi on ſubſtituë $a^2b^2y^2$ pour $2ab^4x - b^4xx$, on aura $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{a^2b^4 - a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}$ ; ajoûtant préſentement de chaque côté $dy^2$, vous aurez $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2} + dy^2 = \frac{b^4 - \overline{a^2 - b^2} \times yy}{b^4 - b^2yy} \times dy^2$. Par conſequent $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b} \frac{\sqrt{b^4 - \overline{a^2 - b^2} \times yy}}{b^2 - yy} = Mm$, élement de la rectification de l'arc $AM$ ; qui eſt tout-à-fait le même que celle de l'élipſe, dans le dernier exemple, excepté ſeulement que dans l'élipſe le ſigne du terme $b^2yy$, eſt négatif, & qu'ici il eſt affirmatif ; par conſequent l'integrale dans cet exemple eſt la même que celle de l'élipſe, ayant ſeulement les ſignes differens, comme par exemple dans ce cas-ci $a^2 + 1 = c$, & $c - 1 = n$.

*Nota.* Si l'hyperbole eſt équilaterale, alors $2ax + xx = yy$, exprimera ſa nature. Prenant ſa difference on aura $2adx + 2xdx = 2ydy$, ou $adx + xdx = ydy$, & $dx = \frac{ydy}{a + x}$ ; quarrant chaque membre on aura $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{aa + 2ax + xx}$ ; & ſubſtituant $yy$ ($= 2ax + xx$) dans le dénominateur ; on aura $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2 + yy}$. Par conſequent, $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy$

V

$\sqrt{\frac{a^2+2y}{a^2+y^2}}$ = l'élement de l'arc $AM$ ; faiſant $a=1$ = $dy\sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}}$ ; dont l'integrale ſera $y+\frac{y^3}{3.2}-\frac{y^5}{5.2}+\frac{y^7}{7.2.2.}-\frac{y^7}{7.2.2.2.2}$, *&c.*

## SCHOLIE.

Si dans l'élipſe $MAm$, $AG$= au grand axe, & $A\mathcal{Q}$= au parametre, que $\mathcal{Q}F$ ſoit pris $=\frac{1}{2}A\mathcal{Q}\frac{19AG+21AQ}{10AG}\times AP$ ; & dans l'hyperbole, $\mathcal{Q}F=\frac{1}{2}A\mathcal{Q}+\frac{19AC+21AQ}{10AG}\times AP$, & qu'on tire la ſeeante $FME$ : alors la tangente $AE$ eſt preſque égale à l'arc $AM$ de l'élipſe ou de l'hyperbole, ſi elle n'eſt pas trop longue. *Fig.* 38.

## EXEMPLE XI.

50. *Rectifier la cycloïde ; ou, trouver la longueur de l'arc AM de cette courbe.*

Que $A\mathcal{Q}=x$, $AB=1$ ; $\mathcal{Q}q=MS=dx$, & par la proprieté du cercle $P\mathcal{Q}=\sqrt{x-xx}$ : ainſi $AP=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, & par la ſimilitude des triangles $AP\mathcal{Q}$, $MmS$, on a $A\mathcal{Q}(x):AP(x^{\frac{1}{2}})::MS(dx):Mm=x^{-\frac{1}{2}}dx$ = l'élement de l'arc $AM$, dont l'integrale ſera $2x^{\frac{1}{2}}=2AP$ = à l'arc $AM$. Ainſi la longueur $AD$ de la moitié de la cycloïde égale deux fois le diametre $AB$ du cercle generateur, ce que nous ſçavons, par d'autres principes, être vrai. *Fig.* 26.

## EXEMPLE XII.

51. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AM de la ciſſoïde de* Diocles *AMI.*

Que $AB$ diametre du cercle generateur ſoit $a$, & nommé $PB$, $x$, l'ordonnée $PM$, $y$, alors $AP=a-x$. Maintenant par la nature de la courbe $PM(y)=AP\times\sqrt{\frac{AP}{PB}}$, qui eſt $y=\overline{a-x}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\times\overline{a-x}|^{\frac{3}{2}}$ ; & prenant la diffe- *Fig.* 42.

rence de cette équation, viendra $dy = dx \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \times \overline{a-x}\,|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \times \overline{a-x}\,|^{\frac{1}{2}} = \frac{-a-2x}{2x}\sqrt{\frac{a-x}{x}} \times dx$ ; & en le quarrant on aura $dy^2 = \frac{\overline{aa+4ax+4xx} \times \overline{a-x}}{4x^3} \times dx^2 = \frac{a^3+3aax-4x^3}{4x^3} \times dx^2$. D'où il ſuit que $dx^2+dy^2 = \frac{a^3+3aax}{4x^3} \times dx^2$ ; ainſi $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{adx}{2x}\sqrt{\frac{a+3x}{x}} = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx \times \sqrt{a+3x}$.

Preſentement la comparant à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes* $Dz^{n+\frac{1}{2}r-1}\,dz\sqrt{e+fz^n}$, faiſant $z=x$, $D=\frac{1}{2}a$, $b=-1$, $n=1$, $e=a$, $f=3$, on aura $P\left(\sqrt{\frac{e+fx^n}{x^n}}\right) = \sqrt{\frac{a+3x}{x}}$ ; $R\left(\sqrt{f}\right) = \sqrt{3}$ ; $T\left(\sqrt{\frac{e+fx^n}{x^n}}\right) = \sqrt{\frac{a+3x}{x}}$ & $S\left(\sqrt{\frac{e}{x^n}}\right) = \sqrt{\frac{a}{x}}$. Ainſi l'integrale $\frac{-2}{n}DP + \frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, deviendra l'integrale de la differentielle donnée $-\sqrt{\frac{a+3x}{x}} + a\sqrt{3}\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}\right.$, ou $= -a\sqrt{\frac{a+3x}{x}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left|\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+3ax}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}\right.$.

Mais on doit changer cette integrale pour qu'elle exprime l'arc $AM$.

Pour y parvenir, faites $x=a$, l'integrale deviendra $-2a+3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left|\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}\right.$, ſi maintenant on en retranche l'autre integrale, on aura pour l'expreſſion de la longueur de l'arc $AM$, $a\sqrt{\frac{a+3x}{x}} - 2a + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left|\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}\right.$, ſe reſſouvenant que la ſouſtraction du raport $\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$ du raport $\frac{\sqrt{a+\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$ eſt une diviſion de la derniere par la premiere.

Pour conſtruire préſentement cette integrale ; tirez $AC$ ($\sqrt{\frac{4}{3}aa}$) coupant l'aſymptote en $C$, de maniere que $CAB$ ſoit le tiers d'un angle droit ; que $BD$ ($\sqrt{ax}$) ſoit moyen proportionnel entre $AB$ ($a$) & $PB$ ($x$) ; tirez enſuite $CD$, ($\sqrt{\frac{1}{3}aa - ax}$). De même tirez $AE$, coupant $PM = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}$, & vous aurez l'arc $AM$ de la ciſſoïde $= 2AE - 2AB + 3BC \left| \frac{AB+AC}{BD+DC} \right. = 4\sqrt{\frac{a+3x}{x}} - 2a + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa} \left| \frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}} \right.$.

## SECTION V.

### *Uſage du calcul integral dans la cubation des ſolides & dans la quadrature de leurs ſurfaces.*

### PROBLEME.

52. *Cuber ou meſurer la ſolidité d'un corps quelconque, formée par la révolution d'une figure plane AMN, autour de l'axe AQ.*

Fig. 7. TIrez l'ordonnée *pm*, infiniment proche de *PM*; enſuite on peut prendre le parallelograme *PMrp*, pour le trapeze *PMmp*; par conſéquent le cylindre formé par le petit parallelograme *PMrp*, pendant que la figure *ANQ* ſe meut autour de l'axe *AQ*, peut être pris pour l'élement de la portion du ſolide, formé par la circonvolution de la portion *AMP* de cette figure plane; & l'integrale de cet élement ſera égal à la ſolidité de cette portion conçuë, comme compoſée d'un nombre infini de cylindres, chacun d'une hauteur infiniment petite.

Faites $AI = x$, $PM = y$, & que le raport du rayon du cercle à la circonference, ſoit exprimé par $\frac{r}{p}$. Alors la circonference du cercle décrit par le rayon *PM* ſera $= \frac{py}{r}$, & l'aire dudit cercle ſera $\frac{p}{2r} y^2$, qui étant multiplié par *Pp* (*dx*) deviendra $\frac{p}{2r} y^2\, dx =$ à la ſolidité dudit cylindre *PMqp*, ou ce qui eſt la même choſe à l'élement de la portion du ſolide; & ſi pour $y^2$, vous ſubſtituez ſa valeur priſe dans l'équation de la courbe *AMN*, vous aurez une expreſſion differentielle affectée d'une ſeule quantité inconnuë $x$, dont l'integrale exprimera la ſolidité cherchée.

## EXEMPLE PREMIER.

### 53. *Cuber un cone droit.*

Un cône droit peut être formé par la révolution d'un triangle rectangle $ABC$, autour de ſon côté ou axe $AB$. Supoſons maintenant $AB=a$, $BC=r$, $AP=x$, $PM=y$, alors à cauſe des triangles ſemblables $APM$, $ABC$; $AP(x)$: $PM(y)::AB(a):BC(r)$; donc $\frac{rx}{a}=y$; & quarrant chaque membre $\frac{rrxx}{aa}=yy$. C'eſt pourquoi $\frac{pr^2dx}{2r}$ (= l'élement du (*) ſolide) $=\frac{pr^2x^2dx}{2a^2r}=\frac{prx^2dx}{2a^2}$, (ſubſtituant $\frac{rx}{a}$ pour $y$) = à l'élement de la ſolidité de la partie du cone formé par le triangle $APM$, dont l'integrale $=\frac{prx^3}{6a^2}$ = à la ſolidité de la partie du cone; & ſi vous ſubſtituez $a$ pour $x$, la ſolidité de tout le cone ſera $\frac{pra^3}{6a^2}=\frac{1}{6}apr\times\frac{1}{3}a=\frac{1}{2}pr\times\frac{1}{3}a$, c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier la baze par $\frac{1}{3}$ de la hauteur.

Fig. 43.

* art. 52.

## EXEMPLE II.

### 54. *Meſurer la ſolidité de la ſphere, ou une portion quelconque d'icelle.*

La ſphere eſt formée par la révolution d'un demi-cercle $ABa$, autour de ſon axe ou diametre $ACa$, que le rayon $AC=r$, $AP=x$, $PM=y$, enſuite par la proprieté du cercle generateur $yy=2rx-xx$; donc $\frac{py^2dx}{2r}=\frac{2prxdx-px^2dx}{2r}$ = à l'élement du ſegment de la ſphere formé par la revolution du demi ſegment du cercle $APM$, dont l'integrale $=\frac{3prx^2-px^3}{6r}$ = la ſolidité du ſegment $AMm$; & ſi on ſubſtituë tout le diametre $2r$, à la place de $x$, la ſolidité de toute la ſphere ſera $=\frac{12pr^3-pr^3}{6r}=2pr^2-\frac{4}{3}pr^2=\frac{8}{3}pr^2=2pr\times\frac{1}{3}r$; c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier par $(\frac{1}{3}r)\frac{1}{3}$ du rayon ou $\frac{1}{6}$ du diametre, le rectangle du diametre $2r$, &

Fig. 44.

de la circonference $p$ ; & ſi le diametre $2r=1$, alors la ſolidité de la ſphere $=\frac{1}{6}p$.

### Corollaire I.

Il ſuit de-là qu'une ſphere eſt égale à une piramide quadrangulaire, dont la baze eſt le rectangle produit par le diametre de la ſphere $2r$, & par la circonference du cercle, dont la hauteur eſt égale au tiers du demi-diametre de la ſphere.

### Corollaire II.

Puiſque la ſolidité d'un cylindre circonſcrit à une ſphere eſt $pr^2$ ; ainſi elle eſt à la ſphere, comme $pr^2$ eſt à $\frac{2}{3}pr^2$, ou comme $3pr^2$ à $2pr^2$, ou comme 3. à 2.

### Exemple III.

55. *Si EDBF eſt un cylindre droit, & que la partie DBMAF, ſoit coupé par un plan DFA paſſant par le centre C de la baze inferieure, & par F extremité du diametre FD de la ſuperieure ; on demande à meſurer ou cuber cette partie DBMAF, qu'on apelle* l'onglet.

Fig. 45. Que $AD$, ſoit perpendiculaire à $BE=2r$, tirez $CF$, & d'un point quelconque $P$, dans $AD$, tirez $PM$, parallele à $CB$, & $PN$, parallele à $CF$, joignez les points $M$, $N$, & nommez la hauteur $FB$, $a$. Maintenant un triangle quelconque $PMN$, rectangle en $M$, formé comme nous venons de dire, eſt ſemblable au triangle rectangle $CBF$. Cela ſupoſé, nommez $CP$, $x$ ; enſuite on aura $\overline{PM}^2 = rr-xx$ ; & $CB(r) : BF(a) :: PM(\sqrt{rr-xx}) : MN = \frac{a}{r}\sqrt{rr-xx}$ ; & l'aire du triangle $PMN$, eſt $\frac{1}{2}PM \times MN = \frac{a}{2r} \times \overline{rr-xx}$, qui étant multiplié par $Pp$ $(dx)$ ſera $\frac{arrdx-axxdx}{2r}$ = l'élement de la partie $APMN$ de l'*onglet*; dont l'integrale ſera $\frac{arx}{2} - \frac{ax^3}{6r}$ = à la ſolidité de cette même partie $APMN$ & lorſque $x=r$, alors cette derniere expreſſion ſera $\frac{1}{3}ar^2 =$

à la ſolidité de la moitié de l'*onglet*, & par conſequent toute la ſolidité entiere $= \frac{2}{3} ar^2$.

## EXEMPLE IV.

56. *Meſurer un ſolide formé par la révolution de la partie FmM de la* lunulle *d'*Hypocrate *FAD, autour du rayon ED comme axe.*

Tirez la tangente *Aa*; nommez le rayon *CE*, 1; alors le rayon *CA* eſt $\sqrt{2}$: de même faites $EP = x$, l'ordonnée $PM = y$, & $Pm = z$; alors $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{PM}^2$; par la proprieté du cercle; c'eſt-à-dire, en termes algebriques $2 - 1 - 2x - xx\ (= 1 - 2x - xx) = yy$; & $\overline{ED}^2 - \overline{EP}^2 = \overline{Pm}^2$, ou bien, $1 - xx = zz$, d'où l'aire du cercle décrit par $PM$, ſera $\frac{p - 2px - pxx}{2r}$; & l'aire du cercle décrit par $Pm$ ſera $\frac{p - pxx}{2r}$, & la difference de ces aires ſera $\frac{px}{r} =$ à l'*anneau* décrit par $Mm$; & multipliant cette expreſſion par la differentielle $dx$, on aura $\frac{pxdx}{r} =$ à l'élement de la partie du ſolide décrit par la partie *FmM* de la *lunulle*; dont l'integrale ſera $\frac{pxx}{2r} =$ à la ſolidité de cette même partie. Fig. 46.

## EXEMPLE V.

57. *Cuber, ou meſurer un conoïde parabolique formé par la révolution d'un eſpace parabolique d'un ordre quelconque autour de ſon axe.*

Que le parametre $= 1$; que $AD = a$, $BD = r$, $AP = x$, $PM = y$. Maintenant la nature de toutes les paraboles s'exprime en general par $y^m = x$, d'où $y = x^{\frac{1}{m}}$; donc $yy = x^{\frac{2}{m}}$; par conſequent $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{px^{\frac{2}{m}}dx}{2r} =$ l'élement du ſolide formé par la revolution de la partie *APM* de la parabole; dont Fig. 1.

l'integrale ſera $\frac{mp}{2m+4\times r} x^{\frac{m+2}{m}}$ ; & ſubſtituant $y^2x$ pour $x^{\frac{m+2}{m}}$ ſon égal, on aura $\frac{mpy^2x}{4+2m\times r}$ = l'integrale de ce même ſolide.

Si l'on ſubſtituë $a$, hauteur de tout le conoïde pour $x$ ; & $2r$, diametre de la baze pour $2y$ ; alors la ſolidité de tout le conoïde ſera $\frac{mpr^2a}{4+2m\times r} = \frac{m}{4+2m} \times apr = \frac{1}{2} pr \times \frac{ma}{2+m}$.

Il ſuit de-là que ſi la parabole ordinaire eſt la courbe generatrice du conoïde ; alors $m=2$, donc $\frac{m}{2+m} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$. D'où il ſuit qu'il faut multiplier la baze par la moitié de la hauteur ; par conſequent le conoïde formé ſera la moitié d'un cylindre de même baze & hauteur.

## EXEMPLE VI.

58. *Cuber un ſpheroïde formé par le mouvement d'un eſpace ſemi-éliptique autour de ſon grand ou petit axe.*

*Fig.* 40. Faites $AP=x$, $PM=y$ & $Aa=a$, que le parametre $=b$ ; après quoi vous aurez $\overline{PM}^2 = AP \times b - \frac{\overline{AP}^2 \times b}{Aa}$ ; c'eſt-à-dire, $yy=bx-\frac{bx^2}{a}$, pour exprimer la nature ou la propriété de l'élipſe. Par conſéquent (*) $\frac{yy}{2r} dx = \frac{pbx}{2r} - \frac{pbx^2}{2ra} \times dx = \frac{pbx}{2r} dx - \frac{pbx^2}{2ra} dx$, élement du ſolide formé par la révolution de la partie de l'élipſe $APM$ ; & l'integrale de cet élement ſera $\frac{pbx^2}{4r} - \frac{pbx^3}{6ar}$ = audit ſolide.

* *art.* 52.

Si l'on ſubſtituë tout l'axe $a$, à la place de $x$, tout le ſpheroïde ſera $\frac{pba^2}{4r} - \frac{pba^2}{6r} = \frac{6pba^2-4pba^2}{24r} = \frac{pba^2}{12r}$.

D'où il ſuit que ſi l'axe conjugué $Cc=2r$, alors on aura $4r^2=ab$ ; ainſi la ſolidité de tout le ſpheroïde $=\frac{1}{3}$ *par* ; c'eſt-à-dire,

à-dire, un ſpheroïde éliptique eſt égal à un cone qui a pour ſa hauteur le grand axe $a$ de l'élipſe, & pour le diametre de ſa baze quatre fois l'axe conjugué, ſçavoir $4r$; & parce que la hauteur d'un cylindre circonſcrit à un ſpheroïde étant $a$, le diametre $=r$, la ſolidité de ce cylindre ſera $\frac{1}{2}apr$; & par conſéquent un ſpheroïde, auſſi-bien qu'une ſphere, eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonſcrit.

*Autrement.*

On peut abreger cet exemple ainſi; que $r=1$, l'expreſſion generale (*) $\frac{py^2}{2r}\,dx$, deviendra $\frac{py^2}{2}\,dx$. * art. 52.

Faites $Cc=1$, $AC=a$, & $PC=x$, l'équation de l'élipſe ſera $1-\frac{xx}{aa}=yy$; & ſubſtituant $1-\frac{xx}{aa}$ pour $yy$, dans cette même expreſſion generale; on aura $\frac{py^2}{2}\,dx=\frac{p}{2}\,dx-\frac{pxx}{2aa}\,dx=$ l'élement de la partie du ſpheroïde formé par la révolution de la partie $MPcC$ de l'élipſe, & pour ſon integrale on aura $\frac{px}{2}-\frac{px^3}{6aa}=\frac{p}{2}\times x-\frac{x^3}{3aa}=$ la ſolidité de ladite partie du ſpheroïde; & ſubſtituant $a$ pour $x$, on aura $\frac{p}{2}\times a-\frac{a}{3}=\frac{p}{2}\times\frac{3a-a}{3}=\frac{2}{3}\,a\times\frac{p}{2}$; mais $\frac{p}{2}=$au cercle formé par la révolution de $Cc$; par conſequent la ſolidité du ſperoïde $=$ au $\frac{2}{3}$ du cylindre de même baze & de même hauteur.

## EXEMPLE VII.

### 59. *Cuber, ou meſurer la ſolidité d'un conoïde hyperbolique, formée par la révolution d'une demie hyperbole autour de ſon grand axe.*

Que $AP=x$, $PM=y$, le parametre $=b$, & le grand axe $=a$. L'équation qui exprime la nature de la courbe, eſt $AP\times b+\frac{\overline{AP}^2\times b}{Aa}$; c'eſt-à-dire, $y^2=bx+\frac{bx^2}{a}$; ainſi $\frac{py^2}{2r}dx=\frac{pbxdx}{2r}+\frac{pdx^2}{2ra}\,dx=$ à l'élement du conoïde formé par la révolution de la partie $APM$ de l'hyperbole autour Fig. 41.

de ſon axe $Aa$, dont l'integrale ſera $\frac{pbx^4}{4r} + \frac{pbx^5}{6ra}$ = à la ſolidité du même conoïde ; & quand la hauteur du conoïde $=a$, c'eſt-à-dire, quand $x=a$, on a pour la ſolidité du conoïde $\frac{6pba^4 + 4pba^4}{24r} = \frac{10pba^4}{24r} = \frac{5pba^4}{12r}$ ; & ſi l'axe conjugué $=2r$, alors $2r=\sqrt{ab}$, & $4r^2=ab$ ; & ſi vous ſubſtituez cette valeur dans la derniere expreſſion, la ſolidité du conoïde ſera $\frac{5}{3}par$ (*).

Quand l'hyperbole eſt équilaterale, ſon équation ſera $y^2=ax+xx$, ce qui donne $\frac{py^2}{2r}\,dx = \frac{apxdx+px^2dx}{2r}$ ; dont l'integrale ſera $\frac{apx^2}{4r} + \frac{px^3}{6r}$, & par la même raiſon $2r$ étant dans ce cas $=a$, & $b=a$, la ſolidité ſera $\frac{5}{6}pa^2$.

Il ſuit de-là que la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt $\frac{1}{2}par$, qui par conſéquent eſt à la ſolidité du conoïde, comme $\frac{1}{2}par$ eſt à $\frac{5}{3}par$, ou comme 3 à 10 ; & dans le conoïde formé par l'hyperbole équilaterale, le cylindre circonſcrit eſt $\frac{1}{4}pa^2$ ; donc ce même cylindre eſt au conoïde comme $\frac{1}{4}pa^2$ eſt à $\frac{5}{6}pa^2$, ou comme 3 à 10.

Faites $PC=x$, & $Cc=1=r$, $Ac=a$, comme ci-devant dans l'éliſe, l'équation de l'hyperbole ſera $yy=\frac{xx}{aa}-1$, d'où $\frac{py^2}{2}\,dx = \frac{px^2}{2aa}\,dx - \frac{p}{2}\,dx$ ; dont l'integrale ſera $\frac{1px^3}{6aa} - \frac{px}{2}$, & parce que $x$ ne commence point à $A$, il faut faire $x=a$ ; alors cette integrale ſe changera en celle-ci $\frac{pa}{6} - \frac{pa}{2}$, qui étant retranchée de la premiere, donnera $\frac{px^3}{6aa} - \frac{px}{2} + \frac{pa}{3}$ = le ſolide formé par la révolution de la partie $AMP$ de l'hyperbole.

(*) Ce n'eſt que dans cette ſupoſition ; car ſi on prend d'autres points dans la courbe, le raport changera.

## EXEMPLE VIII.

60. *Cuber un ſolide formé par la révolution d'un eſpace hyperbolique infini CABED, autour d'une de ſes aſymptotes CD.*

Que $AB=a$, $AC=b$, $CP=x$, $PM=y$, & que $Pp=dx$; enſuite que la circonference du cercle décrit par le rayon $AC=p$, & celle que décrit le rayon $PC=\frac{px}{a}$, qui multiplié par $PM$ $(y)$ donne $\frac{pxy}{a}$, pour la ſuperficie d'un cylindre formé par le parallelogramme $CPMR$, qui multiplié de nouveau par $Pp$ $(dx)$ donne la ſolidité du petit cylindre $PpqM$, c'eſt-à-dire, $\frac{pxy}{a}\,dx=$ l'élement du ſolide; mais la nature de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes, eſt exprimée par $xy=ab$, donc $y=\frac{ab}{x}$ & $\frac{pxy}{a}\,dx=\frac{pabx}{ax}\,dx=pbdx$; dont l'integrale eſt $pbx=$ à la ſolidité de l'eſpace infini $CABED$; & ſi on ſubſtituë $a$ pour $x$, toute la ſolidité entiere ſera $pba$. Fig. 47.

## EXEMPLE IX.

61. *Cuber, ou meſurer la ſolidité d'un conoïde formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique AMBDC, autour de CD, moitié de l'axe conjugué de l'hyperbole AMB.*

Nommez $CA$, $a$, $CD$, $b$, $CP$, $x$, $PM$, $y$, $BD$, $r$; maintenant $\frac{py}{r}$ eſt le circuit décrit par le point $M$, & $\frac{pyy}{2r}$ eſt égal à tout le cercle qui a $PM$ pour rayon; qui étant multiplié par $dx$, donne $\frac{pyy}{2r}\,dx$, pour l'élement du ſolide. Mais par la propricté de la courbe $yy=\frac{aaxx+aabb}{bb}$; ſubſtituant la valeur de $yy$ dans $\frac{py}{2r}\,dx$, on aura $\frac{aapxxdx+aabbpdx}{2bbr}$ pour l'élement du conoïde, dont l'integrale $=\frac{aapx^3}{6bbr}+\frac{aapx}{2r}$, & ſubſti- Fig. 48.

tuant $\frac{bbyy}{xx+bb}$ pour $aa$, il viendra $\frac{px^3yy}{6rxx+6bbr} + \frac{bbpyyx}{2rxx+2bbr}$ = à la ſolidité du conoïde formé par l'eſpace $AMPC$; & quand $x=b$, & $y=r$, alors tout le conoïde $=\frac{bpr}{3}$.

### Corollaire.

Un cylindre formé par la révolution du parallelograme $ACSB$, autour de l'axe $CS$, eſt $\frac{1}{2}pba$; ainſi il eſt à ce ſolide hyperbolique comme $\frac{1}{2}pba$, eſt à $pba$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{2}$ eſt à 1, ou comme 1 à 2.

### Exemple X.

62. *Meſurer un ſolide formé par la révolution d'une parabole autour de ſa demie-ordonnée CB.*

Fig. 49. Supoſons $AB=r$, $BC=b$, $AP=x$, $PM=y$; enſuite ſi on ſupoſe que le patametre = 1, l'équation qui exprime la nature de la parabole, eſt $y^2=x$, & comme il eſt évident * art. 52. (*) que l'élement de ce ſolide eſt le cercle décrit par le rayon $MD$ multiplié par $Dd=dy$. Que le raport du rayon à la circonference ſoit comme $r$ à $p$; mais $MD=PD=AB-AP=r-x$. La circonference du cercle décrit par $MD$, eſt $=p-\frac{px}{r}$, & l'aire de ce même cercle eſt $\frac{pr}{2} - px + \frac{px^2}{2r}$ d'où l'élement ou la difference du ſolide eſt $\frac{prdy}{2} - pxdy + \frac{px^2dy}{2r}$.

Maintenant ſi au lieu de $x$ & de $x^2$, vous ſubſtituez leurs valeurs $y^2$ & $y^4$, priſes de l'équation de la courbe, vous aurez $\frac{prdy}{2} - py^2dy + \frac{py^4dy}{2r}$ = l'élement de la partie indéfinie du ſolide formé par la révolution de la portion $MCD$, autour de l'axe $BC$; dont l'integrale ſera $\frac{1}{2}pry - \frac{py^3}{3} + \frac{py^5}{10r}$ = à la ſolidité de ladite partie.

Mais ſi au lieu de $y^2$ vous ſubſtituez $x$, ſa valeur dans * art. 52. l'expreſſion generale (*) la même ſolidité donnera $\frac{1}{2}pry - \frac{pxy}{3} + \frac{px^2y}{10r} = p \times \frac{1}{2}ry - \frac{xy}{3} + \frac{x^2y}{10r}$; & ſi vous ſubſtituez $b$,

pour $y$, & $r$ pour $x$, tout le ſolide ſera $p \times \frac{1}{2} br - \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br = 30 - 20 + 6 \times \frac{pbr}{60} = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr \times \frac{8}{15} b$; c'eſt-à-dire, que la baze, ou, ce qui eſt la même choſe, le cercle décrit par le rayon $AB$, doit être multiplié par $\frac{8}{15}$ de la hauteur $BC$.

Or un cylindre de même baze & haureur eſt $\frac{1}{2} pbr$, donc il eſt à ce ſolide parabolique comme $\frac{1}{2} pbr$ eſt à $\frac{1}{2} pbr \times \frac{8}{15} b$; c'eſt-à-dire, comme 1 à $\frac{8}{15}$, ou comme 15 eſt à 8.

## EXEMPLE XI.

63. *Cuber, ou, meſurer un ſolide formé par la révolution de la courbe logarithmique autour de ſon aſymptote AH.*

Dans cette courbe la ſoutangente étant toujours invariable $= a$, $ydx = ady$; donc $dx = \frac{ady}{y}$. D'où il ſuit que $\frac{p^2 dx}{2r} = \frac{pay dy}{4r}$ = l'élement d'une partie du ſolide formé comme il vient d'être dit, dont l'integrale ſera $\frac{pay^2}{4r}$; ſubſtituant $r = AB$, au lieu de $y$, on aura pour le ſolide entier $\frac{par^2}{4r} = \frac{1}{4} apr$. *Fig. 28.*

Il ſuit de-là que puiſqu'un cylindre dont la hauteur $= a$, & dont le rayon de la baze $= r$, eſt $\frac{1}{2} apr$; par conſéquent ce cylindre eſt au ſolide comme $\frac{1}{2} a$ eſt à $\frac{1}{4} a$, ou bien comme 2 eſt à 1.

## EXEMPLE XII.

64. *Cuber un ſolide formé par la révolution de la ciſſoïde autour de la ligne AB comme axe.*

Que $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; par la nature de la courbe on aura $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$, ainſi $\frac{py^2}{2r} dx = \frac{px^3}{2r \times 1-x} dx$; c'eſt-à-dire, (faiſant $2r = AB = 1$) $= \frac{px^3}{1-x} dx$, dont l'integrale ſera $\frac{1}{4} px^4 + \frac{1}{5} px^5 + \frac{1}{6} px^6 + \frac{1}{7} px^7$ &c. = à la portion du ſolide décrit par $APM$; & ſubſtituant $AB = 1$, pour $x$, il viendra *Fig. 27.*

$\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p$ *&c.* ou $p \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$, *&c.* mais cette ſerie eſt infinie, comme il eſt aiſé de le démontrer par la nature de l'hyperbole ; donc le ſolide eſt infini par la même raiſon.

*Autrement.*

*Par la meſure d'un raport.*

*Si l'aire APM de la ciſſoïde de* Diocles, *ſe meut autour de la baze AB comme axe, on demande la meſure du ſolide qui en réſultera.*

Fig. 50. Par la proprieté de la courbe, nommant $AP$, $x$, & $PM$, $y$, on aura $x\sqrt{\frac{x}{a-x}} = y$, d'où il ſuit que $\frac{py^2}{2r}dx = \frac{p}{2r}dx\frac{x^2}{a-x}$ = lélement du ſolide requis, qui comparé à la premiere forme des Tables de M. *Cottes*, faiſant $D = \frac{p}{2r}$, $\theta = 4$, $n = 1$, $e = a$, $f = -1$; donnera $-\frac{px^3}{6r} - \frac{paxx}{4r} - \frac{paax}{2r} - \frac{pa^3}{2r} \Big| \frac{a-x}{a}$ pour l'integrale de la differentielle donnée ; ou bien $-\frac{px^3}{6r} - \frac{pax^2}{4r} - \frac{paax}{2r} + \frac{pa^3}{2r} \Big| \frac{a}{a-x}$ ; puiſque le logarithme de $a$, à $a-x$, avec le ſigne affirmatif, eſt le même que celui du raport de $a-x$ à $a$, avec le ſigne négatif.

On peut conſtruire cette integrale de la maniere ſuivante : Que $AP\ (x), AB(a), AR\ (\frac{aa}{x}), AS\ (\frac{a^3}{xx}), AT\ (\frac{a^4}{x^3})$ ſoient en proportion continuë. Enſuite au module $TS\ (\frac{a^4-a^3x}{x})$ prenez $PX$ égal à la meſure du raport qui eſt entre $AB\ (a)$ & $PB\ (a-x)$ ; c'eſt-à-dire, faites $PX = \frac{a^4-a^3x}{x} \Big| \frac{a}{a-x}$ ; & de $X$ vers $B$, faites $XZ$ égale à $SR + \frac{RB}{2} + \frac{BQ}{3} = \frac{a^3-a^2x}{xx} + \frac{aa-ax}{2x} + \frac{a-x}{3}$, & le ſolide ſera égal à un cylindre dont la baze eſt $PM$, dont la valeur eſt $\frac{px^3}{2r \times a-x}$, & dont la hauteur $PZ$ aura pour ſa valeur $-\frac{a^3-a^2x}{xx} - \frac{aa-ax}{2x} - \frac{a-x}{3} +$

$\frac{a^4-a^3x}{x^3} \Big| \frac{a}{a-x}$ ; par conſequent $\frac{p}{2r} \times \frac{x^3}{a-x} \times -\frac{a^3-a^3x}{xx} - \frac{aa-ax}{2x} - \frac{a-x}{3} + \frac{a^4-a^3x}{x^3} \Big| \frac{a}{a-x} = -\frac{px^3}{6r} - \frac{paxx}{4r} - \frac{paax}{2r} + \frac{pa^3}{2r} \Big| \frac{a}{a-x}$, qui eſt l'integrale qu'il falloit conſtruire.

## SCHOLIE.

65. La valeur du ſolide infini formé par la révolution de la ciſſoïde $AMI$, autour de l'aſymptote $BOH$, peut ſe trouver de cette façon : Que $ANB$ ſoit le demi-cercle generateur, $AP$, $x$, $AB$, $a$, alors toutes les ordonnées $PM$ déeriront des ſurfaces cylindriques. Par conſéquent $r : p :: PB \times PM\ (x\sqrt{ax-xx}) : \frac{px}{r}\sqrt{ax-xx}$ = à la ſurface décrite par $PM$ ; lequel multiplié par $dx$ deviendra $\frac{pxdx}{r}\sqrt{ax-xx}$ qui ſera l'élement du ſolide formé comme nous l'avons déja expliqué. *Fig. 50.*

Pour trouver préſentement l'integrale de cette differentielle, concevons que le demi-cercle generateur circule autour d'un axe parallele à l'aſymptote $BOH$, & que dans ce mouvement il paſſe par le point $A$ ; alors toutes les ordonnées $PN$, déeriront auſſi des ſurfaces cylindriques ; ainſi $\frac{p}{r}$ $xdx\sqrt{ax-xx}$ ſera l'élement du ſolide formé par ce mouvement, qui eſt égal à l'élement du premier ſolide qu'il falloit cuber ou meſurer ; dont le ſolide ciſſoïdale infini, formé ſuivant la révolution qui vient d'être dite, eſt égal au dernier ſolide formé par la révolution du demi-cercle generateur, autour d'une ligne droite parallele à ſon aſymptote, paſſant par le point $A$.

## PROBLEME II.

*66. Meſurer la ſuperficie d'un ſolide formé par la révolution d'une figure AMNQ, autour de ſon axe AQ.*

Que le raport de la circonferenee au diametre d'un cercle queleonque ſoit $\frac{r}{p}$ : que $AP = x$, $PM = y$ ; enſuite vous *Fig. 7.*

aurez $Pp=Mq=dx$, $qm=dy$ ; donc $Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}$ ; la circonference décrite par le rayon $PM=\frac{py}{r}$, qui multiplié par $Mm$, eſt égal à $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ = à l'élement d'une partie de la ſuperficie du ſolide formé par la révolution de la partie $AMP$ de la figure $AMNQ$ ; ſubſtituant maintenant la valeur de $dx^2$ qu'on trouvera par l'équation de la courbe differentiée, l'integrale de cette expreſſion donnera la ſuperficie cherchée.

## SCHOLIE.

67. Si $\frac{p}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ eſt l'élement d'une ſuperficie formée par la révolution d'une figure plane autour de la ligne $x$, comme axe ; & ſi $\frac{p}{r}$ exprime le raport du rayon à la circonference du cercle, & que $y$ repreſente une ordonnée quelconque perpendiculaire à l'abſciſſe décrivant un cercle pendant la révolution qui forme cette ſuperficie ; & ſi on ſupoſe que $\frac{p}{2r}zz$, eſt l'integrale de cet élement, je veux dire égal à un cercle dont le rayon eſt $z$ ; alors l'integrale de $2y\sqrt{dx^2+dy^2}=zz$, quarré du rayon dudit cercle. Par conſéquent, ſi au lieu de trouver l'integrale de l'élement $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, d'une ſuperficie quelconque formée comme nous venons de dire, on trouve l'integrale de $2y\sqrt{dx^2+dy^2}$ ; cette integrale ſera égale au quarré du rayon du cercle égal à l'integrale de l'élement $\frac{py}{2}\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou à un cercle égal à cette ſuperficie, dont cette derniere expreſſion eſt l'élement.

## EXEMPLE I.

### 68. *Trouver la ſuperficie d'un cone droit.*

*Fig.* 43. Un cone droit étant formé par la révolution d'un triangle rectangle $ABC$, autour de ſon axe $AB$, il faut d'abord trouver la valeur de $dx^2$, par l'équation au triangle : ainſi ſoit $AB=a$, $BC=r$, $AP=x$, $PM=y$, & par la propriété des triangles rectangles $AP\,(x) : PM\,(y) :: AB\,(a) : BC\,(r)$ ;

par

par conſéquent $rx = ay$, qui étant differentiée, donne $rdx = ady$, donc $dx = \frac{ady}{r}$, & $dx^2 = \frac{aady^2}{rr}$; ſubſtituant à preſent $\frac{a^2dy^2}{r^2}$ pour $dx^2$ dans l'expreſſion generale $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, on aura $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{py}{r^2}\sqrt{a^2dy^2+r^2dy^2} = \frac{py}{r^2} \times dy\sqrt{a^2+r^2}$ = l'élement d'une partie de la ſurface conique, formée par la révolution du triangle $APM$, dont l'integrale ſera $\frac{py^2}{2r^2}\sqrt{a^2+r^2}$ = à cette même partie de la ſuperficie; & ſubſtituant $y$ pour $r$, toute la ſuperficie entiere du cone ſera $= \frac{1}{2}p\sqrt{a^2+r^2} = \frac{1}{2}p \times AC$; c'eſt-à-dire, égale au rectangle formé par la moitié de la circonference de la baze, & par le côté $AC$ du cone.

## EXEMPLE II.

*69. Trouver la ſuperficie d'une ſphere, ou celle d'un de ſes ſegmens quelconque.*

Si le diametre du cercle generateur = 1, alors l'élement de l'arc $Mm = \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, qui étant multiplié par la circonference décrite par le rayon $PM$, donnera $pdx$ pour l'élement d'une partie de la ſuperficie de la ſphere formée par le demi-ſegment $AMP$; & l'integrale $px$ de cette differentielle ſera la ſuperficie du ſegment de la ſphere ayant $p$, pour peripherie ou circonference de la baze circulaire, & $x$ pour hauteur; & ſi vous ſubſtituez le diametre de la ſphere 1 pour $x$, toute la ſuperficie de cette ſphere ſera égale à $p$, ou (faiſant $1 = a$) $= ap$. *Fig. 45.*

Il ſuit de-là que la ſuperficie d'un ſegment quelconque de la ſphere, eſt à la ſuperficie de la ſphere entiere comme $px$ eſt à $p$, ou $x$ à 1, c'eſt-à-dire, comme la hauteur du ſegment eſt au diametre de la ſphere.

## EXEMPLE III.

70. *Trouver la ſuperficie d'un conoïde parabolique.*

L'équation qui exprime la nature de la patabole eſt $AP \times a = \overline{PM}^2$ $(yy)$ ou $ax = yy$, qui étant differentié, donne $adx = 2ydy$ ; d'où il ſuit que $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$ ; par conſéquent $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{py}{ar} \times \sqrt{4y^2dy^2+a^2dy^2} = \frac{py}{ar} \times dy\sqrt{4y^2+a^2}$ = à l'élement de la ſuperficie de la partie du conoïde, formée par la portion $APM$ de la parabole qui revient au premier cas de la troiſiéme forme de la petite *Table des ſimples courbes qui peuvent être quarrées*, *art.* 8. ou bien, à la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes* ; car ſi dans la petite Table vous faites $D = \frac{p}{ar}$, $z = y$, $n = 2$, $e = aa$, $f = 4$, vous aurez la differentielle $Dz^{n-1}\,dz\,\sqrt{e+fz} = \frac{pydy}{ar}\sqrt{4y^2+a^2}$, & pour ſon integrale $\frac{2D}{3nf}R^3$, qui en faiſant $R\,(=\sqrt{e+fz}) = \sqrt{4y^2+a^2}$, deviendra $\frac{p}{12ar} \times \overline{4y^2+aa}^{\frac{3}{2}}$ = à l'integrale de l'élement de la ſuperficie du conoïde.

De la même maniere, dans la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*, on verra que l'integrale qui répond à $\theta = 1$, eſt $\frac{2e+2fz^n}{3nf}DP$, faiſant $P\,(=\sqrt{e+fz^n}) = \sqrt{4y^2+a^2}$ ; & ſubſtituant, comme ci-devant, les valeurs de $D$, $n$, $e$, $f$, viendra $\frac{2aa+8yy}{24} \times \frac{p}{ar}\sqrt{4y^2+a^2} = \frac{p}{12ar}\overline{4y^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$ = à ce qui a été trouvé ſuivant la petite Table des Quadratures.

*Fig.* 51. On peut conſtruire cette integrale de cette ſorte : faites $r = y$, tirez $PC = 2y$, $PB = a$, & joignez $BC$ ; alors $BC = \sqrt{4yy+aa}$ que vous nommerez $u$, & l'integrale à conſtruire ſera $\frac{p}{12ay}u^3$. Que $z$ ſoit le diametre du cercle égal à cette integrale, ſon aire ſera $\frac{pz^2}{8y}$. Par conſéquent $\frac{p}{12ay}u^3 = \frac{pz^2}{8y}$ c'eſt-à-dire, $\frac{u^3}{12a} = \frac{z^2}{8}$ ; ainſi $\frac{8u^3}{12a} = z^2$, d'où il ſuit que $z =$

* *art.* 67. $\sqrt{\frac{2u^3}{3a}}$ = à l'integrale de $2y\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Faites maintenant $PH=BC$, & $PE=\frac{1}{3}BC$, joignez $B$, $E$. De $H$ tirez $HF$, parallele à $BE$ : faites $GP=PF$, coupez $GH$ en $D$, duquel comme centre décrivez le demi-cercle $GKH$, coupant $PM$ prolongé en $K$, alors la ligne droite $PK$, ſera le diametre d'un cercle égal à la ſuperficie du conoïde diminuée d'un ſixiéme d'un cercle dont le rayon égale $a$.

## EXEMPLE IV.

70. *Trouver la ſuperficie du ſpheroïde formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une élipſe autour de la partie DC du demi-axe Bc.*

Nommez le demi-axe $AC$, $a$, ſon conjugué $BC$, $b$, l'abſciſſe $PA$, $x$, & l'ordonnée correſpondante $MP$, $y$ ; maintenant $\frac{bb}{aa}\times\overline{2ax-xx}=yy$, & $2adx-2xdx=\frac{2a^2}{b^2}\times ydy$, ou $adx-xdx=\frac{a^2}{b^2}ydy$ & $dx=\frac{\frac{a^2}{b^2}ydy}{a-x}$; donc $dx^2=\frac{a^2y^2dy^2}{b^4-b^2y^2}$; *Fig. 52. 53.*

par conſéquent l'élement de l'arc $AM\ (=\sqrt{dx^2+dy^2})$ ſera $=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4+a^2-b^2y^2}{b^2-y^2}}=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4+ccyy}{b^2-y^2}}$ (quand $AC\ (a)$ eſt plus grand que $BC\ (b)$ & en ſubſtituant $cc$, pour $a^2-b^2$) ou $=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{b^4-ccy}{b^2-y^2}}$, quand $AC\ (a)$ eſt moindre que $BC$ $(b)$ & que $cc$, eſt ſubſtitué pour $b^2-a^2$.

De plus, par la nature de la courbe $DM=\frac{a}{b}\sqrt{bb-yy}$, donc la circonference du cercle décrite par $DM$ eſt $\frac{pa}{rb}\sqrt{bb-yy}$, qui étant multiplié par l'élement de l'arc déja trouvé, donnera $\frac{pady}{rbb}\sqrt{\frac{b^4+ccyy}{bb-yy}\times\overline{bb-yy}}=\frac{pady}{rbb}\sqrt{b^4+ccyy}$, quand $AC$ ſurpaſſe $BC$ ; mais quand $AC$, eſt moindre que $BC$, elle eſt $=\frac{pady}{rbb}\sqrt{b^4-ccyy}$ ; l'un & l'autre étant l'élement de la ſuperficie d'un ſphéroïde, formé par la révolution de la partie $AM$ de l'élipſe autour de la partie $CD$ de l'axe, & peut ſe raporter à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes* ; car faiſant $D=\frac{pa}{rbb}$, $z=y$, $n=2$, $\theta=0$,

$e = b^4$, $f = \overline{-+cc}$, la differentielle $Dz^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt{e+fz^n}$, ſe changera en $\frac{pa^4y}{rbb}\sqrt{b^4 \pm ccyy}$, & l'integrale $\frac{z^n}{n}DP + \frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, en faiſant $P\,(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}) = \frac{1}{y}\sqrt{b^4 \pm ccyy}$, $R\,(=\sqrt{f}) = c$, ou $\sqrt{-cc}$, $T\,(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}) = \frac{1}{y}\sqrt{b^4 \pm ccyy}$. $S\,(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}) = \frac{b^2}{y}$, ſe changera en celle-ci $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{b^4 \pm ccyy} + \frac{pab^2}{2rc}\left|\frac{yc+\sqrt{b^4 \pm ccyy}}{b^2}\right.$ qui eſt $\sqrt{b^4 + ccyy}$, la meſure d'un raport quand $AC$ $(a)$ ſurpaſſe $BC$ $(b)$, & il eſt $\sqrt{b^4 - ccyy}$, la meſure d'un angle quand $AC$ $(a)$ eſt moindre que $Bc$ $(b)$.

*Fig. 52.* On peut conſtruire l'integrale dans le premier cas, de la façon ſuivante. Que $F$ ſoit un des foyers, faites $CF\,(\sqrt{aa-bb} = \sqrt{cc} = c$, (ſuivant la nature de l'élipſe) : $CB$ $(b)$ : : $CB$ $(b)$ : $CE = \frac{bb}{c}$, & tirez la ligne droite $DE$. Faites de même $CE\,(\frac{bb}{c})$ : $DE\,(\frac{1}{c}\sqrt{b^4 - ccyy})$ : : $CD$ $(y)$ : $KL = \frac{y}{bb}\sqrt{b^4 + ccyy}$, à laquelle ſi vous ajoûtez $LM$, après l'avoir égalé à la meſure du raport qui ſe trouve entre $DE\,(\frac{1}{c}\sqrt{b^4 + ccyy}) + DC\,(y)$ & $CE\,(\frac{bb}{c})$ comparé au module $CE\,(\frac{bb}{c})$ ; c'eſt-à-dire, ſi vous prenez $LM = \frac{b^2}{c}\left|\frac{cy + \sqrt{b^4 + ccyy}}{b^2}\right.$ ; alors $AC$ $(a)$ eſt à $KM = KL + LM\,(= \frac{y}{bb}\sqrt{b^4 + ccyy} + \frac{b^2}{c}\left|\frac{cy+\sqrt{b^4+ccyy}}{b^2}\right.$, comme un cercle décrit par le rayon $AC$ $(a)$ (lequel cercle égal $\frac{paa}{2r}$) eſt à la ſuperficie du ſphéroïde formé par la révolution de la partie $AM$ de l'élipſe $= \frac{pay}{2rbb}\sqrt{b^4 + ccyy} + \frac{pab^2}{2rc}\left|\frac{cy+\sqrt{b^4+ccyy}}{b^2}\right.$, qui eſt l'integrale qu'il falloit conſtruire.

Maintenant que le rayon d'un cercle égal à la ſuperficie du ſphéroïde, ſoit $z$, ce qui donne cette proportion $CA$ $(a)$ : $KM$ : : un cercle décrit par $CA$, c'eſt-à-dire, $\frac{paa}{2r}$ : à la

ſuperficie du ſphéroïde, ſupoſée égale à un cercle $\frac{pzz}{2r}$, dont le rayon eſt $z$, & multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $\frac{paxz}{2r} = KM \times \frac{paa}{2r}$; ainſi $zz = KM \times a$; c'eſt-à-dire, un moyen proportionnel entre $KM$ & $AC$ $(a)$ ſera le rayon d'un cercle qui égalera la ſuperficie du ſphéroïde formé par la révolution de la partie $AM$ de l'élipſe.

Quand $DC$ $(y)$ devient égal à $BC$ $(b)$; alors $DE$ devient $BE$; ainſi ſi vous faites $CE\ (\frac{bb}{c}) : BE\ (\frac{b}{c}\sqrt{bb+cc}) :: BC\ (b) : KL = \sqrt{bb+cc} = AC = a$, & que $LM$ ſoit égal à la meſure du raport qui eſt entre $AC\ (a) + BC\ (b)$ & $CE\ (\frac{bb}{c})$ au module $CE\ (\frac{bb}{c})$ on aura $CA$, eſt à $KM$, comme un cercle ayant $CA$ pour rayon, eſt à la $\frac{1}{2}$ de la ſuperficie de tout le ſphéroïde.

Dans le dernier cas on fait la conſtruction de l'integrale de cette maniere : prenez dans l'otdonnée $DM$, le point $E$; enſorte que la ligne $CE$ étant tirée, ſoit égale à $\frac{bb}{c}$, ou à une troiſiéme proportionnelle à $CF$ $(c)$ & $CB$ $(b)$; & faites $CE\ (\frac{bb}{c}) : DE\ (\frac{1}{c}\sqrt{b^4-ccyy}) :: DC\ (y) : KL = \frac{y}{bb}\sqrt{b^4-ccyy}$. Enſuite ſi à $KL$, vous ajoûtez $LM$ égale à la meſure de l'angle $DEC$ au module $CE\ (\frac{bb}{c})$; $CA\ (a)$ eſt à $KM$, comme un cercle dont le diametre eſt $CA$ $(a)$ à la ſuperficie du ſphéroïde formé par la révolution de la partie $AM$ de l'élipſe autour de la partie $DC$ de l'axe; ainſi un moyen proportionnel entre $KM$ & $CA$, eſt le rayon d'un cercle égal à ladite ſuperficie. *Fig. 53.*

Quand $CD$ $(y)$ devient égal à $BC$ $(b)$, tirez $BG$, perpendiculaire à $BC$, dans laquelle prenez le point $e$, de maniere que $Ce$ étant tirés, elle ſoit $= EC\ (\frac{bb}{c})$; enſuite ſi vous faites $CE$ ou $Ce\ (\frac{bb}{c}) : Be\ (\frac{b}{c}\sqrt{bb-cc}) :: AC\ (a) : KL = \sqrt{bb-cc} = a$, & qu'à la même vous ajoûtiez $LM$, égale à la meſure de l'angle $eCB$, ayant pour module $eC\ (\frac{bb}{c})$; on aura $CA$, eſt à $KM$, comme un cercle ayant $CA$ pour

rayon, eſt à la $\frac{1}{2}$ de la ſuperficie de tout le ſphéroïde.

## EXEMPLE V.

71. *Trouver la ſuperficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une hyperbole autour de ſon grand axe AP.*

Fig. 54. Que $C$ ſoit le centre $Cc$, une aſymptote $AC=b$, un des demi-axes, & l'autre demi-axe $Ac=a$. Que $CP=b$, $PM=x$. Maintenant par la nature de la courbe $\frac{aa}{bb} \times \overline{yy-bb} = xx$, & $2aaydy=2bbxdx$, donc $dx=\frac{aaydy}{bbx}$, par conſéquent $dx^2=\frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$, & l'élement de l'arc $AM$ $(=dx^2+dy^2)$ ſera $\frac{dy}{b}\frac{\sqrt{a^2yy+b^2yy-b^4}}{yy-bb}=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{ccyy-b^4}{yy-bb}}$, en ſubſtituant $cc$, pour $a^2+b^2$. De plus $PM$ eſt $=\frac{a}{b}\sqrt{yy-aa}$ par la nature de la courbe; ainſi la circonference décrite par $PM$ ſera $\frac{pa}{rb}\sqrt{yy-aa}$, qui multiplié par l'élement de l'arc déja trouvé, donnera $\frac{pady}{rbb}\sqrt{\frac{ccyy-b^4}{yy-bb}\times\overline{yy-bb}}=\frac{pady}{rbb}\sqrt{ccyy-b^4}$, qui eſt l'élement de la ſuperficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de la partie $AM$ de l'hyperbole autour de l'axe $AP$, qui ſe raporte à la même forme dans les Tables de M. *Cottes*, que l'élement de la ſuperficie du ſphéroïde dans le dernier exemple. Car faiſant $D=\frac{pa}{rbb}$, $z=y$, $\theta=0$, $n=2$, $e=-b^4$, $f=cc$, $P=\frac{1}{y}\sqrt{ccyy-b^4}$, $R=e$, $T=\frac{1}{y}\sqrt{ccyy-b^4}$, $S=\frac{b^2}{y}$, on aura l'integrale de cette differentielle ainſi exprimée $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{ccyy-b^4}-\frac{pab^2}{2rc}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{b^2}\right.$. Faites maintenant $b=y$, alors la premiere partie $\frac{1}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}$, de l'integrale ſera $=\sqrt{cc-bb}=a$; par conſequent elle doit être retranchée de cette premiere partie. De

plus en faiſant $b=y$, la partie logarithmique $\frac{bb}{c}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}\right.$ deviendra $\frac{bb}{c}\left|\frac{ab+bc}{bb}\right.$, qu'il faut d'abord ſouſtraire de $\frac{bb}{c}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}\right.$, pour avoir la véritable partie logarithmique. Maintenant à cauſe que le logarithme du raport de $bb$ à $ab$, $+bc$, ayant un ſigne affirmatif, eſt le même que le logarithme du raport de $ab+bc$ à $bb$, avec le ſigne négatif (*par la définition premiere, ſection 2. ſcholie 2.*) par conſéquent la ſomme de $\frac{bb}{c}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}\right.$ & de $\frac{bb}{c}\left|\frac{bb}{ab+bc}\right.$, ſera égal à la differenee cherchée : mais le raport de $cy+\sqrt{ccyy-b^4}$ à $bb$, & le raport de $bb$ à $ab+bc$, forment le raport de $cy+\sqrt{ccyy-b^4}$ à $ab+bc$, d'où il ſuit que la ſomme ſuſdite ſera $\frac{bb}{c}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{ab+bc}\right.$; par conſéquent la véritable integrale qu'il faut conſtruire ſera $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{ccyy-b^4}-\frac{pa^2}{2r}-\frac{pab^2}{2rc}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{ab+bc}\right.$, qu'on pourra faire de cette maniere.

Que $F$ ſoit le foyer de l'hyperbole, par la nature de cette courbe $CF\left(\sqrt{aa+bb}\right)=c:CA\,(b)::CA(b):CE=\frac{bb}{c}$. Tirez $EG$ perpendiculaire à $CA$, coupant l'aſymptote en $G$. Dans l'angle $CEG$, inſcrivez la droite $CH=CP\,(y)$ qu'il faut prolonger juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne $PM$ au point $I$. Enſuite prenez $KL$ égal à $PI-AC=\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}-a$: on aura par la ſimilitude des triangles $CEH$, $CPI$; $CE\left(\frac{bb}{c}\right)$: $EH\left(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy-b^4}\right)::CP\,(y):PI=\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}$. De plus, prenez $LM$ égal à la meſure du raport qui eſt entre $CH\,(y)+EH\left(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy-b^4}\right)$ & $GC\,(b)+GE\left(\frac{ab}{c}\right)$ au module $CE\left(\frac{bb}{c}\right)$; & la ſuperficie formée par la révolution de l'arc $AM$ autour de l'axe $AP$, ſera au cercle décrit par le rayon $AC\,(a)=\frac{paa}{2r}$ comme $KM$ eſt à $AC$.

## EXEMPLE VI.

72. *Trouver la ſuperficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une hyperbole autour de ſon axe conjugué CPB.*

Fig. 55. Que $C$ ſoit le centre, $CA=a$, le demi-axe tranſverſale, & $CB=b$, le demi-axe conjugué; $F$ le foyer, $PM=x$, une ordonnée quelconque à $CA$, & $CP=y$, l'abſciſſe correſpondante.

Maintenant par la nature de la courbe $\frac{bb}{aa} \times \overline{xx-aa} = yy$; d'où $\frac{2bb}{aa} \times xdx = 2ydy$; c'eſt-à-dire $\frac{bb}{aa} \times xdx = ydy$, & $bbxdx = aaydy$, & $dx = \frac{aaydy}{bbx}$, & $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$, & ſubſtituant $\frac{aayy+aabb}{bb}$ pour $xx$, on aura $dx^2 = \frac{a^4bbyydy^2}{aab^4 \times \overline{bb+yy}} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^2 \times \overline{bb+yy}}$. Donc $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{\overline{a^2+b^2} \times \overline{yy+b^4}}{bb+yy}}$: mais $x = \frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}$, qui étant multiplié par $\frac{p}{r}$, donne pour produit $\frac{pa}{rb}\sqrt{bb+yy}$, qui eſt la circonference décrite par le point $M$, & ſi l'on multiplie l'élement de l'arc par cette circonference on aura $\frac{pa\,dy}{rbb} \sqrt{\frac{\overline{a^2+b^2} \times \overline{y^2+b^4} \times \overline{b^2+y^2}}{bb+yy}} = \frac{pady}{rbb}\sqrt{a^2+b^2y^2+b^4}$, & ſubſtituant $cc$, pour $a^2+b^2$, elle ſera $\frac{pady}{rbb}\sqrt{ccyy+b^4}$, élement de la ſuperficie formée par la révolution de l'arc $AM$, autour de ſon demi-diametre conjugué $CP$.

Cet élement differentiel étant le même que celui du premier cas de l'*exemple* 4. ſon integrale doit être la même que celle qu'on avoit trouvée dans cet exemple 4. *par exemple*, $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{ccyy+b^4} + \frac{pab^2}{2rc} \left| \frac{cy+\sqrt{cc+yy}b^2}{bb} \right.$, qu'on peut conſtruire de cette façon.

Faites $CF\ (\sqrt{aa+bb}=c) : CB\ (b) :: CB\ (b) : CE = \frac{bb}{c}$.

Tirez

Tirez la ligne droite $PE$ $(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4})$, enſuite faites $CE$ $(\frac{bb}{c}) : PE\,(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4}) :: PC\,(y) : KL = \frac{y}{bb}\sqrt{ccyy+b^4}$, & prenez $LM$ égal à la meſure du raport qui eſt entre $PE$ $(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4}) + PC\,(y)$ ; c'eſt-à-dire, qui eſt entre $\frac{cy+\sqrt{ccyy+b^4}}{c}$, & $CE\,(\frac{bb}{c})$ au module $CE\,(\frac{bb}{c})$ & la ſuperficie formée par la révolution de l'arc $AM$ de l'hyperbole autour du demi-axe conjugué $CB$, ſera au cercle décrit par le demi-diametre $CA\,(a)$ ( qui eſt $\frac{paa}{2r}$ ) comme la ſomme des lignes $KL$ & $LM$, ſont au même rayon $CA\,(a)$.

## EXEMPLE VII.

73. *Trouver la ſuperficie formée par le mouvement de l'arc CM d'une hyperbole équilatere autour de l'aſymptote ABP.*

Que $A$ ſoit le centre, & que $AB$ ſoit $= BC$ ; tirez parallelement à l'aſymptote, $AH$ ; tirez $AP$, & menez $PM$ parallele à $CB$ : nommez maintenant $AB$, ou $BC$, $a$ ; $AP$, $x$ ; $PM$, $y$ : enſuite par la proprieté de la courbe, on aura $aa = xy$ ; d'où il ſuit, que $x = \frac{aa}{y}$ & $\frac{aa}{x} = y$, qui étant differentié, donnera $dy = \frac{-aadx}{xx}$ ; par conſequent $dy^2 = \frac{a^4dx^2}{x^4}$. De plus $x = \frac{aa}{y}$ qui étant differentié donnera $\frac{aady}{yy} = dx$, & $\frac{a^4dy^2}{y^4} = dx^2$ ; donc $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\frac{a^4dx^2}{x^4} + \frac{a^4dy^2}{y^4}} = \frac{dy}{yy}\sqrt{a^4+y^4} = Mm$, élement de l'arc $CM$, qui étant multiplié par $\frac{py}{r}$ donnera pour produit $\frac{pdy}{ry}\sqrt{a^4+y^4} = \frac{p}{r}y^{-1}dy\sqrt{a^4+y^4}$, qui eſt l'élement de la ſuperficie formée par la révolution de l'arc $CM$. Cette differentielle peut ſe comparer à celle de la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*, & on aura l'integrale en faiſant $D = \frac{p}{r}$, $z = y$, *Fig. 56.*

$\theta=0$, $n=4$, $e=a^4$, $f=y^4$, $P=\sqrt{a^4+y^4}$, $R=aa$, $T=\sqrt{a^4+y^4}$, & $S=yy$. Car alors elle deviendra $\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}\right.$. Mais cette integrale doit être corrigée, parce que l'abſciſſe $AP$, $x$, augmente pendant que l'ordonnée $PM$, $y$, diminuë; c'eſt pourquoi les ſignes doivent être changés; c'eſt-à-dire, elle eſt $-\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4} + \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}\right.$. De plus, puiſque l'abſciſſe $AP$, $x$, commence au point $A$, & non pas au point $B$, la même integrale doit être corrigée par raport à ſon amplitude, ce qu'on peut faire ainſi. Faites $y=a$, alors la premiere partie de l'integrale ſera $\frac{1}{2}praa\sqrt{2}$, qu'il faut ajoûter à $-\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4}$, & cette ſomme $\frac{1}{2}\frac{paa}{r}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4}$, ſera la premiere partie de l'integrale corrigée. De plus la partie logarithmique $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}\right.$ doit être changée; ce qu'on peut faire en faiſant $a=y$, car alors il viendra $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{\sqrt{2}+1}{1}\right.$, qui étant ſouſtrait de $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}\right.$, on aura $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{\frac{aa}{yy}+\frac{\sqrt{a^4+y^4}}{yy}}{\sqrt{2}+1}\right.$, qui eſt la vraye partie logarithmique; & par conſequent la vraye integrale ſera $\frac{paa}{2r}\sqrt{2} - \frac{p}{2r}\sqrt{a^4+y^4} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\left|\frac{\frac{aa}{yy}+\frac{\sqrt{a^4+y^4}}{yy}}{\sqrt{2}+1}\right.$ qu'on peut conſtruire de cette maniere.

Tirez $AM$ & $AC$, & du point $C$, tirez $CG$, parallele à $AM$, coupant l'aſymptote $AP$, prolongée juſqu'en $G$. Maintenant à cauſe des triangles ſemblables $APM$, $ABF$; $AP\left(\frac{aa}{y}\right) : PM\,(y) :: AB\,(a) : BF=\frac{yy}{a}$; d'où $\frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4}=AF$. De plus $GC$, étant parallele à $AM$, les triangles $APM$, $GBC$ ſont ſemblables, & par conſéquent $PM\,(y) : AP\left(\frac{aa}{y}\right) ::$

$CB\,(a) : BG = \frac{a^3}{yy}$ ; d'où on tire $CG = \frac{a}{yy}\sqrt{a^4+y^4}$. Enſuite ſi vous faites $AH = AC\,(a\sqrt{2}) - AF\,(\frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4}) +$ la meſure du raport qui eſt entre $BG\,(\frac{a^3}{yy}) + GC(\frac{a}{yy}\sqrt{a^4+y^4})$, & $AC\,(a\sqrt{2}) + AB\,(a)$ (lequel raport eſt $= \frac{\frac{aa}{yy}+\sqrt{\frac{a^4+y^4}{yy}}}{\sqrt{2}+1}$) raportée au module $AB\,(a)$ ; alors la ſuperficie formée par la révolution de l'arc $CM$, autour de l'aſymptote $AP$, ſera au cercle dont le rayon eſt $AB\,(a)$ ; c'eſt-à-dire, $= \frac{paa}{2r}$, comme

$$AH\,(a\sqrt{2} - \frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4} + a\left|\frac{\frac{a^3}{yy}+\frac{a\sqrt{a^4+y^4}}{yy}}{a\sqrt{2}+a}\right.$$ eſt à $BC\,(a)$,

& par conſéquent la valeur de $AH$, multipliée par $\frac{pa}{2r}$, ſera égale à ladite ſuperficie.

## EXEMPLE VIII.

74. *Trouver la ſuperficie formée par la révolution de l'arc infini PZ de la courbe logarithmique, autour de ſon aſymptote AX.*

Que $AP$ ſoit une ordonnée perpendiculaire à l'aſymptote que vous nommerez $y$ ; que $TP$ ſoit une tangente au point $P$, & que la ſoutangente invariable $AT$ ſoit $= a$ ; tirez $pm$, parallele à $AT$, & infiniment proche du point $P$. *Fig. 57.*

Préſentement à cauſe de la ſimilitude des triangles $ATP$, $mpP$, on a $AP\,(y) : TP\,(\sqrt{aa+yy}) :: mP\,(dy) : pP = \frac{dy}{y}\sqrt{aa+yy} =$ à l'élement de l'arc $PZ$, qui étant multiplié par $2y$, le produit $2dy\sqrt{aa+yy}$ ſera l'élement d'un quarré dont le côté eſt égal au diametre d'un cercle égal à la ſuperficie cherchée. *Par la ſcholie, art.* 67. ſupoſons ce quarré $= \overline{AO}^2$.

Maintenant on peut raporter cet élement à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*, en mettant $y, 2, 0, 2, aa, 1$.

pour $z$, $u$, $\theta$, $D$, $e$, $f$. De plus en mettant pour $P$, $R$, $T$, $S$; $\frac{1}{y}\sqrt{aa+yy}$, $1$, $\frac{1}{y}\sqrt{aa+yy}$, & $\frac{a}{y}$; l'on aura pour la differentielle $2dy\sqrt{aa+yy}$, & pour l'integrale $y\sqrt{aa+yy}+aa\left|\frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a}\right.$.

Pour conſtruire cette integrale il faut obſerver que la ligne droite $AO$, eſt moyenne proportionnelle entre $a$ & $\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}+a\left|\frac{a+\sqrt{aa+yy}}{a}\right.$; & la quantité $\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$, eſt égale à la ligne droite $PE$ perpendiculaire à la courbe en $P$, & bornée par l'aſymptote en $E$ : car à cauſe de la ſimilitude des triangles $TPA$, $APE$; $TA\ (a) : TP\ (\sqrt{aa+yy}) :: AP\ (y) : PE = \frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$; & l'autre quantité $a\left|\frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a}\right.$ eſt la meſure du raport qui eſt entre $AP+TP$, & $AT$ au module $AT$, ou, par la ſimilitude des triangles $APF$, $APE$, la meſure du raport qui eſt entre $AE+EP$ & $AP$, au même module $AT$. Ainſi cette integrale peut ſe conſtruire de la maniere ſuivante.

Tirez $PE\ (\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy})$ perpendiculaire à la courbe au point $P$, terminée à l'aſymptote en $E$; continuez l'ordonnée $AP$ en $L$, de telle ſorte que $AL$ ſoit $= AE+EP\ (\frac{yy}{a}+\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy})$, & tirez $LK$ dans le même ſens de la courbe, c'eſt-à-dire, vers $Z$, que vous ferez $= EP\ (\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy})$, & que cette même ligne $LK$ coupe la courbe en $M$; enfin entre $KM\ (\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}+a\left|\frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a}\right.$, & $AT$, trouvez une moyenne proportionnelle $AO$ ($LM$, par la nature de la courbe, étant la partie logarithmique) qui ſera le rayon d'un cercle égal à la ſuperficie formée par la révolution de l'arc infini $PZ$.

## EXEMPLE IX.

75. *Trouver la ſuperficie formée par la révolution de l'arc infini MZ ou AZ de la ciſſoïde de* Diocles, *autour de ſon aſymptote AG.*

Tirez l'ordonnée *PM* perpendiculaire à l'aſymptote, & *mp* infiniment proche de cette perpendiculaire. Enſuite faiſant $AB=a$, $AN=x$, *MN* étant perpendiculaire à *AB*, l'élement *Mm* de l'arc *MZ*, ſera $\frac{adx\sqrt{4a-3x}}{2\times\overline{a-x}\sqrt{a-x}}$; qui multiplié par $\frac{p}{r}\times\overline{a-x}=\frac{p}{r}\times MP$, donnera pour l'élement de la ſuperficie formée par la révolution déja expliquée de l'arc *MZ* $\frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$. *Fig. 42.*

Maintenant on peut raporter cet élement à la onziéme forme des Tables de M. *Cottes*. Car faiſant $z=x$, $0=1$, $n=1$, $D=\frac{pa}{2r}$, $e=4a$, $f=-3$, $g=a$, & $b=-1$, la differentielle de cette onziéme forme $Dz^{n-1}dz\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}$, ſe changera en $\frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, & l'integrale $\frac{1}{nb}DP\mathcal{Q}+\frac{eb-fg}{nfb}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, & faiſant $P(\sqrt{e+fz^n})=\sqrt{4a-3x}$, $\mathcal{Q}(\sqrt{g+bz^n})=\sqrt{a-x}$, $R(\sqrt{\frac{f}{b}})=\sqrt{3}$, $T(\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}})=\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, $S(\sqrt{\frac{eb+fg}{bg+bz^n}})=\sqrt{\frac{\overline{-a}}{\overline{-a+x}}}$ ou $\sqrt{\frac{a}{a-x}}$, ſe changera en $-\frac{pa}{2r}\times\sqrt{4a-3x}\times\sqrt{a-x}-\frac{pa}{2r}\times\frac{a}{\sqrt{3}}\left|\frac{\sqrt{3a-3x}+\sqrt{4a-3x}}{\sqrt{a}}\right.$, qui eſt l'integrale de la differentielle donnée $\frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, dans laquelle on peut changer les ſignes négatifs dans les deux parties.

On peut conſtruire à preſent cette integrale de cette façon: coupant *MN* en *F*, & tirez *AFE*, coupant l'aſymptote en *E*: faites *DB* moyen proportionnel entre *AB* & *NB*; de même, que l'angle *CAB* ſoit $=\frac{1}{3}$ d'un angle droit, & con-

tinuez l'aſymptote juſqu'en $B$, coupant $AC$ au point $C$; alors $BC = \frac{a}{\sqrt{3}}$; car $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = 2\overline{BC}$; donc $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 4\overline{BC}^2$; ainſi $\frac{\overline{AB}^2}{3} = \overline{BC}^2$; par conſéquent $BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. De plus $AF = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, & à cauſe de la ſimilitude des triangles $ANF$, $ABE$; $AN\,(x) : AF\,(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}) :: NB\,(a-x) : FE = \frac{1}{2}\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x}$, & $DC = \sqrt{\frac{4aa-3ax}{3}}$.

Mais la ſuperficie formée par la révolution de l'arc infini $MZ$, eſt à un cercle $(= \frac{paa}{2r})$ dont le rayon eſt $AB$ $(a)$, comme $2EF\,(\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x}) +$ la meſure du raport qui eſt entre $BD\,(\sqrt{aa-ax}) + DC\,(\frac{\sqrt{4aa-3ax}}{3})$ & $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$ eſt au module $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$.

Faiſant préſentement $x = o$ dans l'integrale déja trouvée, on aura $\frac{pa}{2r} \times 2a + \frac{pa}{2r} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right.$, qui eſt l'integrale qui exprime la quantité de l'arc infini $AZ$, étant à un cercle dont le rayon eſt $AB$ $(a)$ comme $2AB +$ la meſure du raport qui eſt entre $BA$ $(a) + AC\,(\frac{2a}{\sqrt{3}})$ & $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$ au module $BC$, & la difference de ces integrales en retranchant $\frac{pa}{2r}$, *par exemple*, $2AB\,(2a) - EF\,(\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x}) +$ la meſure du raport $BA(a) + AC\,(\frac{2a}{\sqrt{3}})$ à $BD\,(\sqrt{aa-ax}) + DC\,(\frac{\sqrt{4aa-3ax}}{3})$, le module étant $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$ : donnera la quantité de l'arc fini $AM$. Car elle ſera à un cercle ayant $BA$ pour rayon, comme cette difference eſt au même rayon $BA$.

Quand la courbe fait ſa révolution autour de la baze $AB$, M. *Cottes* dans ſes *harmonia menſurarum*, donne la quantité de la ſuperficie formée ; mais l'opération eſt longue & difficile, les differentielles ne pouvant ſe raporter directement à aucune de ces Tables.

## SECTION VI.

### *Uſage du calcul differentiel & integral pour trouver le centre de gravité des figures.*

### PROBLEME.

*76. Trouver le centre de gravité d'une figure plane.*

QUe $AB$ ſoit l'axe, & $MN$ une ordonnée à cet axe, & que $mn$ ſoit une autre ordonnée infiniment proche de la premiere, & ſupoſé que $C$ ſoit le centre de gravité. *Fig. 58.*

Maintenant ſi on conçoit les parties infiniment petites $MmnN$, de la figure comme autant de petits poids ſuſpendus à l'axe $AB$, par les differens points $P, P, P, \&c.$ & que le point de ſuſpenſion ſoit en $A$, ſommet de la figure, la diſtance du centre de gravité $C$ à $A$, point de ſuſpenſion, ſera égale au quotient de la diviſion de la ſomme des efforts de tous ces poids infiniment petits $MmnN$, diviſée par la ſomme de toutes ces petites parties ou poids, c'eſt-à-dire, par l'aire de toute la figure. Ceci eſt évident ſuivant les principes de la méchanique ordinaire.

C'eſt pourquoi, nommant $AP$, $x$, $MP$, $y$, $Pp$, $dx$, la partie infiniment petite, ou le petit poids $MmnN$ ſera $= 2ydx$, & leur ſomme totale ſera $=$ à l'integrale de $2ydx$, & l'effort d'une de ces petites parties ou poids, ſera $2ydx$, multiplié par $AP(x) = 2yxdx$, dont l'integrale diviſée par l'integrale de $2ydx = AC$, diſtance du centre de gravité de $A$, ſommet de la figure.

#### EXEMPLE PREMIER.

*77. Trouver le centre de gravité d'un triangle ADE.*

Tirez la ligne droite $AB$, coupant la baze $DE$ en $B$, après *Fig. 59.*

quoi le triangle $ABD$, étant égal à $ABE$, chacun de ces triangles peuvent être réſolus en une infinité de petites parties ou poids $MmpP$, $PNnp$, chacunes égales les unes aux autres de chaque côté de la ligne $AB$ priſe comme axe, & par conſéquent le centre de gravité $C$ doit être en quelqu'endroit de la ligne $AB$.

Maintenant nommez $AB, a$, $DE, b$, $AP, x$, $MN, y$; & tirez $AF$ perpendiculaire à $DE$ que vous nommerez $c$. Enſuite par la ſimilitude des triangles $AMN$, $ADE$; $AB\ (a) : DE\ (b) :: AP\ (x) : MN = \frac{bx}{a}$, de même à cauſe des triangles ſemblables $AP\mathcal{Q}$, $ABF$; on aura $AB\ (a) : AF\ (c) :: AP\ (x) : A\mathcal{Q} = \frac{cx}{a}$; & comme $AP\ (x) : A\mathcal{Q}\ (\frac{cx}{a}) :: Pp\ (dx) : \mathcal{Q}q = \frac{cdx}{a}$; d'où il ſuit que l'effort $xydx = \frac{cbx^2dx}{a^2}$; dont l'integrale $= \frac{cbx^3}{3a^2}$, laquelle étant diviſée par $\frac{cbx^2}{2a^2}$, aire du triangle $ADE$, le quotient ſera $\frac{2}{3}x =$ à la diſtance du centre de gravité de la partie $AMN$ du triangle $ADE$, depuis ſon ſommet; & ſubſtituant $a$ pour $x$, la diſtance du centre de gravité de tout le triangle $ADE$, depuis le ſommet $A$ ſera $= \frac{2}{3} AB\ (a)$.

## EXEMPLE II.

78. *Déterminer le centre de gravité C dans la parabole ordinaire.*

*Fig. 58.* Nommant $AP, x$, $MN, y$, $AB, a$, & le parametre $p$; alors $px = yy$; ainſi $y = \sqrt{px}$, donc $ydx = dx\sqrt{px}$; & par conſequent l'effort $xydx = xdx\sqrt{px} = xdxp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, dont l'integrale ſera $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$; mais l'integrale de $ydx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ = à l'aire de la portion $AMN$ de la parabole; par conſequent diviſant $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ par $\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ le quotient $= \frac{5}{3}x = AC$; & ſubſtituant $a$ pour $x$, la diſtance du centre de gravité $C$ au ſommet $A$, ſera $= \frac{5}{3} AB$.

EXEMPLE III.

## EXEMPLE III.

79. *Déterminer le centre de gravité C, dans toutes les paraboles de quelques degrés qu'elles ſoient.*

Dans ce cas $p^n x^m = y^r$, exprime la nature de toutes les paraboles de tous les degrés, d'où on tire $y = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}}$, & par conſéquent $ydx = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} dx$, & l'effort $xydx = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+r}{r}} dx$, dont l'integrale $= \frac{r}{m+2n} p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+2r}{r}}$, qui étant diviſée par l'integrale de $ydx = \frac{r}{m+n} p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+n}{r}}$, le quotient ſera $= \frac{m+r}{m+2r} x =$ à la diſtance du centre de gravité de la portion $MAN$ du ſommet $A$; & ſubſtituant $a$ pour $x$, on aura $\frac{m+r}{m+2r} a = AC$.

## EXEMPLE IV.

80. *Trouver le centre de gravité de l'eſpace ADE, compris entre deux paraboles égales AD, AE, ſe touchant l'une & l'autre au ſommet A, & la ligne droite DE parallele à l'axe commun des deux paraboles.*

Faites $AP = x$, $PM = y$, & que le parametre ſoit $= 1$, ce qui donnera $\overline{AP}^2 (x^2) = (PM \times 1) = y$, par conſéquent l'effort $xydx = x^3 dx$ dont l'integrale eſt $\frac{1}{4} x^4$. Mais l'integrale de $ydx$ eſt $\frac{1}{3} x^3$; donc $\frac{\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{3} x^3} = \frac{3}{4} x = AC$, diſtance du centre de gravité du ſommet $A$. *Fig. 60.*

Les paraboles $AME$, $AMD$ de quelques degrés qu'elles ſoient, auront cette équation $x^m = y^n$, qui exprimera le raport de $AP$ à $PM$, par conſequent $ydx = x^{\frac{m}{n}} dx$, & l'effort $xydx = x^{\frac{m+n}{n}} dx$, dont l'integrale eſt $\frac{nx^{\frac{m+2n}{n}}}{m+2n}$ : mais

l'integrale de $ydx$ eſt $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ ; d'où il ſuit que le quotient de la diviſion de la premiere de ces expreſſions par la derniere qui eſt $\frac{m+n}{m+2n} x$ ſera $= AC$.

## EXEMPLE V.

81. *Déterminer le centre de gravité, d'un arc de cercle.*

Fig. 61. Que $BE$, corde de l'arc donné $BDE$, ſoit parallele au diametre $FG$, regardé comme un axe où ſont ſuſpendus les poids infiniment petits $BM$ ; ainſi leurs efforts ſont comme $BM \times PB$ ; & puiſque le nombre & les efforts de ces petits poids de chaque côté du rayon $AD$, coupant également l'arc $BDE$, ſont égaux, le centre de gravité ſera en la ligne $AD$.

Maintenant que $AB = a$, $AP = HB = x$, & $Pp = Bm = dx$ ; alors $PB\ (\sqrt{aa-xx}) : AB\ (a) :: Bm\ (dx) : BM = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, & $BM \times PB = \sqrt{aa-xx} \times \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = adx = AB \times Bm$ ; & la ſomme des efforts, ou l'integrale de cette expreſſion differentielle, ſera $ax = AB \times BH$, qui étant diviſée par l'arc $BD$, le quotient $\frac{AB \times BH}{BD}$, ſera = à la diſtance du centre de gravité $C$ du centre $A$ du cercle, & ſubſtituant le quart du cercle $FD$, pour $BD$, & le rayon $FA$ ou $AB$ pour $BH$ ; alors $\frac{\overline{AB}^2}{FD}$ ſera la diſtance du centre de gravité $C$ du demi-cercle $FDG$ du centre $A$.

## EXEMPLE VI.

82. *Déterminer le centre de gravité d'un ſecteur de cercle ABE.*

Fig. 62. Le centre de gravité eſt dans le rayon $AD$, qui coupe l'arc $BE$ ; décrivez l'arc $MPM$ avec une diſtance quelconque $AP$, & un autre arc $mpm$, infiniment proche du premier, après quoi l'effort de l'arc $MPM$ multiplié par $Mm$,

ou $Pp$, ſera l'effort du ſegment annulaire $mMPMm$, ou la differentielle de l'effort du ſecteur.

Maintenant que $AB$ ſoit $= a$, $AF = b$, $BD = c$ ; alors l'effort de l'arc $BDE$ $(2ab)$, ſera à l'effort de l'arc $MPM$, comme le triangle $ABE$, eſt au triangle $AMM$, ou comme $\overline{AB}^2$ eſt à $\overline{AM}^2$, puiſque les triangles $ABE$, $AMM$ ſont ſemblables ; d'où il ſuit que l'effort de l'arc $MPM = \frac{2abx^2}{a^2} = \frac{2bx^2}{a}$, & l'effort du ſegment annulaire $mMPMm = \frac{2bxdx}{a}$, dont l'integrale, ou ſomme $\frac{2bx^3}{3a}$, diviſée par la ſomme des poids, ou par l'aire $ac$ du ſecteur, le quotient $\frac{2bx^3}{3aac}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſecteur du cercle $MPM$.

## EXEMPLE VII.

83. *Trouver le centre de gravité d'un ſegment quelconque MAm d'une hyperbole.*

Faites $AC$, $a$, $CB$, $b$, $AP$, $x$, $PM$, $y$, par la nature de la courbe on aura $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax+xx} = yy$ ; donc l'élement des efforts, ſera $\frac{2b}{a} x^{\frac{1}{2}}\, dx \sqrt{2a+x}$, & celle de la difference des poids ſera $\frac{2b}{a} x^{\frac{1}{2}}\, dx \sqrt{2a+x}$, dont chacune peut être comparée à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*. *Fig. 63.*

Car faiſant $\theta = 2$, $n = 1$, *&c.* on aura la ſomme des efforts $= \frac{-3\overline{3aa+ax+2xx}}{3} \times y + 2a^2b \left| \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}} \right.$. De plus ſuppoſant $\theta = 1$, *&c.* la ſomme des poids ſera $= \overline{a+x} \times y + 2ab \left| \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}} \right.$. Ainſi diviſant la premiere integrale par la derniere, on aura $\frac{-\overline{3aa+ax+2xx} \times y + 2a^2b \left| \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}} \right.}{\overline{a+x} \times y + 2ab \left| \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}} \right.}$ = à la diſtance du centre de gravité du ſommet $D$.

Pour conſtruire maintenant cette expreſſion, faites $CB$

$(b) : CA\ (a) :: PM\ (y) : CF = \frac{ay}{b}$. Faites auſſi $PM\ (y) : CB\ (b) :: CA\ (a) : CG = \frac{ab}{y}$; enſuite prenez $CH$ égal à la meſure du raport de $CA\ (a)$ à $FP\ (a + x - \frac{ay}{b})$; lequel raport eſt = à la raiſon doublée de $\sqrt{2a}$, à $\sqrt{x} - \sqrt{2a + x}$; cela fait, ſi vous faites comme $3PH\ (3a + 3x - \frac{3ab}{y} \mid \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}})$:

$$2\,CF\,(\tfrac{2ay}{b}) :: CF(\tfrac{ay}{b}) : CZ = \frac{4ax + 2xx}{3a + 3x - \frac{3ab}{y} \mid \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}}},$$

cette quatriéme proportionelle ſera égale à la diſtance du centre de gravité $Z$ du centre $C$; car ſi on retranche $CA\ (a)$, il viendra $\frac{4ax + 2xx}{3a + 3x - \frac{3ab}{y} \mid \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}}} - a =$

$$\frac{-\sqrt{3aa + ax + 2xx} \times y + 2a^2b \mid \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}}{\sqrt{a + x} \times y + 2ab \mid \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}},$$ qui eſt la même expreſſion qu'on avoit trouvée en premier lieu.

## SCHOLIE.

84. La diſtance du centre de gravité d'un ſegment d'élipſe, ou de cercle à ſon ſommet, s'exprime ainſi;

$$\frac{-\sqrt{3aa - ax + 2xx} \times y - 2a^2b \mid \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a - x}}{\sqrt{2a}}}{\sqrt{a - x} \times y - 2ab \mid \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a - x}}{\sqrt{2a}}},$$ étant la même que celle du centre de gravité de l'hyperbole, ne differant ſeulement que par le changement de quelques ſignes, & la meſure du raport dans l'hyperbole ſe changeant dans le cercle & dans l'élipſe en la meſure d'un angle, parce que $R\ (= \sqrt{-f}) = \sqrt{-1}$ eſt négatif.

## EXEMPLE VIII.

85. *Trouver le centre de gravité de l'eſpace exterieur AMmaA de l'hyperbole.*

Que le demi-diametre conjugué $BC=b$, & le demi-tranſverſale $AC=a$, l'abſciſſe $CP=y$, & l'ordonnée correſpondante $PM=x$. Par la proprieté de la courbe on aura $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}=yy$, ainſi $x=\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}$; donc $\frac{2a}{b}dy\sqrt{bb+yy}$ ſera l'élement des petits poids, & $\frac{2a}{b}ydy\sqrt{bb+yy}$, celui des efforts; & par la comparaiſon de cette differentielle avec la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*, faiſant $\theta=1$ $n=2$, *&c.* l'integrale ſe trouvera $=\frac{2a}{3b}\left|\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}\right.$; & faiſant $y=0$, la même deviendra $2ab^2$, qu'il faut ſouſtraire de cette integrale, le reſte $\frac{2a}{3b}\left|\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}\right.-2ab^2$, ſera l'integrale de la differentielle $\frac{2a}{b}ydy\sqrt{bb+yy}$; & l'integrale de $\frac{2a}{b}dy\sqrt{bb+yy}$, comparée à la quatriéme forme, en faiſant $\theta=0$, $n=2$, *&c.* ſera $\frac{ay}{b}\sqrt{bb+yy}+ab\left|\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.$, par laquelle diviſant l'integrale qu'on vient de trouver, le quotient $\frac{\frac{2a}{3b}\times\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2ab^2}{\frac{ay}{b}\sqrt{bb+yy}+ab\left|\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.}=$ $\frac{2\times\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2b^3}{3y\sqrt{bb+yy}+3bb\left|\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.}$, ſera $=$ à la diſtance du centre de gravité $Z$ du centre $C$.

Fig. 64.

Pour conſtruire maintenant cette expreſſion, faites $AC\ (a):PM\ (\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}=x)::BC\ (b):CR=\sqrt{bb+yy}$. De plus faites $PM\ (\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}):AC\ (a)::BC\ (b):CS=$

$\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}$, & faites encore $PM\left(\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}\right) : AC\,(a) :: CS\left(\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}\right) : CT = \frac{b^3}{bb+yy}$.

Que $CR$, $CT$ tendent vers le même endroit, par exemple, de $C$ vers $PM$; mais que $CS$ ſe meuve dans un ſens contraire; enſuite prenez $CN$ égal à la meſure du raport qui eſt entre $CB\,(b)$ & $ER\left(\sqrt{bb+yy}-y\right)$ comparé au module $CS\left(\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}\right)$ qui s'exprime ainſi $\frac{bb}{\sqrt{bb+yy}} \Big| \frac{b}{\sqrt{bb+yy}-y}$; ce qui étant fait, faites $3PN\left(3y+\frac{3b^3}{\sqrt{bb+yy}} \Big| \frac{b}{\sqrt{bb+yy}}\right) : 2TR\left(2\sqrt{bb+yy}-\frac{2b^3}{bb+yy}\right) :: CR\left(\sqrt{bb+yy}\right)$ eſt à une quatrième propottionelle $= \frac{2\times\overline{bb+yy}^{\frac{1}{2}}-2b^3}{3y\sqrt{bb+yy}+3bb \Big| \frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}} = CZ$, diſtance cherchée.

Remarquez que la conſtruction de ces deux exemples eſt la même que celle qu'a donnée M. *Cottes* dans ſon *Harmonia menſurarum*, pag. 25, 26. part. premiere.

## EXEMPLE IX.

86. *Trouver le centre de gravité d'un cone droit & d'une piramide.*

Fig. 43. Le centre de gravité eſt quelque part dans l'axe $AB$. Si on fait maintenant $AP=x$, $BC=a$, $AB=b$, on aura $PM=\frac{ax}{b}$, & le raport du rayon à la circonference étant celui de $r$ à $p$, la differentielle du petit poids $=\frac{paaxx}{2rbb}dx$, & l'effort de ce même petit poids ſera $\frac{paax^3}{2rbb}dx$, par conſequent la ſomme des efforts $\frac{paax^4}{8rbb}$ diviſée par la ſomme des poids $\frac{paax^3}{6rbb}$, donnera $\frac{3}{4}x=AG$, diſtance du centre de gravité de la partie $AMPm$ du cone; donc $\frac{3}{4}AB$, ſera la diſtance du centre

de gravité de tout le cone depuis le ſommet $A$.

Vous trouverez de la même maniere que la diſtance du centre de gravité d'une piramide depuis ſon ſommet, eſt au $\frac{3}{4}$ de ſon axe depuis ce même ſommet.

## EXEMPLE X.

87. *Trouver le centre de gravité d'un ſegment quelconque de la ſphere.*

Que $AC=r$, $AP=x$, alors la differentielle des poids ſera $pxdx-\frac{px^2dx}{2r}$, & celle des efforts ſera $px^2dx-\frac{px^3dx}{2r}$, & la ſomme des efforts ſera $\frac{px^3}{3}-\frac{px^4}{8r}$, qui étant diviſée par $\frac{pxx}{2}-\frac{px^3}{6r}$, ſomme des poids, le quotient $\frac{8rx-3xx}{12r-4x}$ ſera la diſtance du centre de gravité du point $A$ du ſegment d'une ſphere formée par la révolution d'un demi-ſegment $AMP$, du demi-cercle autour de $AP$. Fig. 44.

## COROLLAIRE.

88. Il ſuit de-là que le centre de gravité de la demie-ſphere eſt $\frac{5}{8}r$; car dans cet exemple $x$ devient $=r$.

## EXEMPLE XI.

89. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde parabolique formé par la révolution d'une parabole autour de ſon axe.*

Dans cet exemple $\frac{pxdx}{2}$ eſt la differentielle des poids; & $\frac{px^2dx}{2}$, celle des efforts, $r$ étant le demi-parametre, la ſomme des poids eſt $\frac{px^2}{4}$, celle des efforts eſt $\frac{px^3}{6}$, qui étant diviſé par $\frac{px^2}{4}$, le quotient ſera $\frac{2}{3}x$ diſtance du centre de gravité de la parabole ordinaire depuis ſon ſommet $A$.

## EXEMPLE XII.

90. *Trouver le centre de gravité d'un ſolide formé par la révolution de l'eſpace parabolique AMBD, autour d'une ligne BT parallele à ſon axe.*

Fig. 65. Que $BD$ ou $AT = r$, $AP = x$, $PM = y$, on aura $\frac{pr}{2} - py + \frac{yy}{2r} =$ à un cercle décrit par $M$ comme rayon, & par conſequent ſera $px^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{pxdx}{2r}$ pour la differentielle des poids, & $px^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{px^2dx}{2r}$ pour celle des efforts. L'integrale de la premiere expreſſion ou la ſomme des poids eſt $\frac{2}{3}px^{\frac{3}{2}} - \frac{px^2}{4r}$, & la ſomme des efforts eſt $\frac{2}{5}px^{\frac{5}{2}} - \frac{px^3}{6r}$, qui étant diviſée par la ſomme des poids, le quotient ſera $\frac{24rx^{\frac{1}{2}} - 10xx}{40rx^{\frac{1}{2}} - 15x} = \frac{24rx - 10yx}{40r - 15y}$, diſtance du centre de gravité de la partie du ſolide formée par $APM$; & quand $x$ devient $= a$ & $y = r$, la diſtance ſera $= \frac{14}{25}a$.

## EXEMPLE XIII.

91. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde hyperbolique ABG, formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique ABG autour de l'axe tranſverſale aCAP.*

Fig. 41. Nommant maintenant $AC$, $2b$, $AB$, $a$, & l'ordonnée $BG$, $r$, l'élement des poids ſera $\frac{prxdx + 2bprxdx}{2aa + 4ab}$, & celui des efforts, $A$ étant le centre du mouvement, ſera $\frac{prx^2dx + 2bprxxdx}{2aa + 4ab}$ dont l'integrale ſera $\frac{prx^3}{8aa + 16ab} + \frac{bprx^3}{3aa + 6ab} = \frac{3prx^3 + 8bprx^3}{24aa + 48ab}$, qui étant diviſé par $\frac{prx^2 + 3bprxx}{6aa + 12ab} = \frac{4prx^2 + 12bprxx}{24aa + 48ab}$, ſomme des poids,

poids, le quotient $\frac{3xx+8bx}{4x+12b}$, ſera la diſtance du centre de gravité du point $A$ dans l'axe $AP$ du conoïde formé par la révolution de la partie $AMP$ de l'hyperbole ; & quand $x=a$, la diſtance du centre de gravité de tout le ſolide depuis le ſommet $A$, ſera $\frac{3aa+8ab}{4a+12b}$ ; d'où il ſuit que $3a+8b : 4a+12b :: a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

## EXEMPLE XIV.

92. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique AMBCD autour de CD, moitié de l'axe conjugué.*

Faiſant les mêmes ſupoſitions que dans l'*art.* 61. l'élement ou la difference des poids ſera $\frac{aapx^2dx}{2bbr}+\frac{aabbpdx}{2bbr}$, & celui des efforts par raport à $AC$ eſt $\frac{aapx^3dx+aabbpxdx}{2bbr}$, dont l'integrale ſera $\frac{aapx^4}{8bbr}+\frac{aabbpxx}{4bbr}=\frac{px^4yy+2bbpx^2y^2}{8rx^2+8bbr}$, en ſubſtituant $\frac{bby}{xx+bb}$ pour $aa$ : qui étant diviſé par la ſomme des poids, le quotient $\frac{3x^3+6bbx}{4xx+12bb}$, ſera la diſtance du centre de gravité du conoïde formé par l'eſpace $ACPM$ autour de la ligne ou axe $AC$. Et quand $x$ devient $=b$, on aura $\frac{9}{16}b$, pour la diſtance de ce même centre de gravité. *Fig.* 48.

C'eſt pourquoi le centre de gravité de tout le conoïde, eſt tellement ſitué dans l'axe $AC$, que la partie depuis le centre $C$, juſqu'au centre de gravité, eſt à $AC$ comme 9 à 16.

## EXEMPLE XV.

93. *Trouver le centre de gravité d'un demi-ſphéroïde formé par la révolution du demi-eſpace éliptique AMca, autour de l'axe Aa.*

Faites $AC=a$, $Cc=r$, $AP=x$, $PM=y$ ; alors quand $PC$ devient $x$, la differentielle des poids ſera $\frac{pyydx}{2r}$ ; mais par *Fig.* 40.

la nature de l'élipſe, $AP$ étant$=x$, $yy : 2ax-xx :: rr : aa$; d'où on tire $yy = \frac{2arrx-rrxx}{aa}$; & ſubſtituant cette valeur dans $\frac{pyydx}{2r}$, on aura $\frac{2aprxdx-prx^2dx}{2aa}$; & multipliant par $x$, la differentielle des efforts ſera $\frac{2aprxxdx-prx^3dx}{2aa}$, dont l'integrale *par exemple* $\frac{prx^3}{3a} - \frac{prx^4}{8aa} = \frac{8aprx^3-3prx^4}{24aa}$, qui étant diviſée par $\frac{12aprxx-4prx^3}{24aa}$ ſomme des poids, le quotient $\frac{8ax-3xx}{12a-4x}$, ſera la diſtance du centre de gravité de la partie du ſolide formé par l'eſpace $APM$ du point $A$; & quand $x$ devient $=a$, la même diſtance ſera $\frac{5}{8}a$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité du demi-ſphéroïde eſt diſtante de $A$ de $\frac{5}{8}a$.

## SECTION VII.

### *Uſage du calcul differentiel & integral dans la recherche des centres de percuſſion des figures.*

#### DE'FINITION.

94. LE centre de *percuſſion* ou d'*oſcillation* d'une figure en mouvement, eſt le point dans lequel toutes les forces de cette figure ſont regardées comme étant toutes réunies en un ſeul point, de maniere que ſi cette figure rencontroit un obſtacle contraire à la direction de ſon mouvement, elle choquera cet obſtacle dans ce point avec plus de force qu'elle ne feroit dans tout autre point de la figure.

Pour cet effet il eſt néceſſaire que les parties de la figure changent conſtament la diſpoſition qu'elles ont à ſe mouvoir, & qu'elles ſéparent leur quantité de mouvement, non comme dans les centres de gravité, en raiſon des eſpaces parcouruës; mais en raiſon compoſée de leurs vîteſſes, & des diſtances de ces centres réciproquement proportionnels à ces mêmes vîteſſes, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elles ſéparent leur quantité de mouvement en parties égales à chaque côté de ce point d'oſcillation. C'eſt pourquoi le centre de percuſſion eſt par raport aux vîteſſes, ce que le centre de gravité eſt à l'égard des petits poids; & comme pour trouver le centre de gravité, on diviſe la ſomme des efforts par la ſomme des poids; ainſi pour trouver le centre de percuſſion, il faut multiplier la ſomme des efforts par des lignes droites égales ou proportionnelles aux eſpaces mûs, & diviſer le produit par la ſomme des efforts; d'où il ſuit :

Que la regle generale pour trouver le centre de percuſſion d'une figure qui ſe meut autour d'un point donné ou axe, eſt de multiplier toutes les parties qui compoſent la

figure ( c'eſt-à-dire, toute ſon aire ou toute ſa ſolidité ) conſiderées comme autant de poids, par les quarrés de leurs diſtances du point de ſuſpenſion, & diviſer le produit par celui des mêmes poids multipliés par les diſtances de l'axe du mouvement, & le quotient ſera la diſtance du centre de percuſſion du point ou axe de mouvement.

Fig. 59. Il ſuit de-là que ſi $AP=x$, $MN=2y$, $Pp=dx$, l'effort de tout le petit poids $MNnm$, ſera $=2yxdx$. Par conſéquent la diſtance du centre de percuſſion du point $A$, eſt égale à l'integrale de $2yx^2dx$, diviſée par l'integrale de $2yxdx$. Donc ſi par l'équation de la courbe vous trouvez la valeur de $y$, que vous ſubſtituez dans ces differentielles, & qu'enſuite vous en preniez les integrales, vous trouverez la diſtance du centre de percuſſion depuis le point $A$, ce qui ſera éclairci par les exemples ſuivants.

## EXEMPLE PREMIER.

95. *Trouver le centre de percuſſion d'une ligne droite AB, qui ſe meut autour de ſon extremité A.*

Fig. 65. Si on conçoit maintenant cette ligne comme diviſée en une infinité de petites parties égales $Pp$ $(dx)$, $AB$ étant $a$, & $AP$, $x$, il eſt évident qu'en tems égaux elles décriront des arcs égaux de cercles concentriques, qui ſeront les uns aux autres comme les diſtances du point $A$; mais la vîteſſe avec laquelle les mêmes arcs ſont décrits, ſont proportionelles aux mêmes arcs; ainſi les vîteſſes ſont comme les diſtances.

Maintenant $xdx$ ſera l'élement ou differentielle des efforts, qui multiplié par $x$, qui repréſente les vîteſſes, donnera $x^2dx$ pour la differentielle des forces, dont l'integrale $\frac{x^3}{3}$ étant diviſée par la ſomme des efforts $\frac{x^2}{2}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie $AP$ de la ligne depuis le point $A$, & le centre de percuſſion de toute la ligne ſera $\frac{2}{3}a$ faiſant $x=a$.

## EXEMPLE II.

96. *Trouver le centre de percuſſion d'un rectangle RISH, ſe mouvant autour d'un de ſes côtés RI.*

Si $RI = SH = a$, $AP = x$, alors $Pp = dx$, ſera l'élement de l'aire, & un des petits poids ſera $= adx$, & ſon effort ſera $axdx$; d'où il ſuit que l'integrale de $ax^2dx$, diviſée par l'integrale de $axdx$ ( ou $\frac{\frac{1}{3}ax^3}{\frac{1}{2}ax^2}$ ) le quotient $\frac{2}{3}x$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie $RCDI$ du parallelograme depuis le côté $RI$; & ſi au lieu de $x$ on ſubſtituë la hauteur $RS = b$ de tout le triangle, la diſtance du centre de percuſſion depuis le côté $RI$ ſera $= \frac{2}{3}b$. Fig. 66.

## EXEMPLE III.

97. *Trouver le centre de percuſſion d'un triangle iſocelle SAH, ſe mouvant autour de la ligne RI, paſſant par le ſommet A, & parallele à la baze SH.*

Que la hauteur $AE$ ſoit $= a$, $AP = x$, $EH = \frac{1}{2}b$, $PL = y$. Enſuite $AP\ (x) : PL\ (y) :: AE\ (a) : EH = \frac{1}{2}b$. D'où il ſuit que $ay = \frac{1}{2}bx$, & $y = \frac{bx}{2a}$; mais l'integrale de $yx^2dx$ = l'integrale de $\frac{bx^3dx}{2a}$ eſt $= \frac{bx^4}{8a}$, & l'integrale de $yxdx =$ à l'integrale de $\frac{bx^2dx}{2a}$ eſt $= \frac{bx^3}{6a}$; par conſequent l'integrale de $yx^2dx$, diviſée par l'integrale de $yxdx$, ou $\frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x$. Fig. 66.

Mais ſi vous ſubſtituez pour $x$, toute la hauteur $AE = a$, la diſtance du centre de percuſſion de tout le triangle $ASH$, depuis le ſommet $A$, ſera $\frac{3}{4}a = \frac{3}{4}AE$.

## EXEMPLE IV.

98. *Trouver le centre de percuſſion d'un triangle iſocelle SAH qui ſe meut autour de ſa baze SH.*

Que tout ſoit comme dans l'exemple précedent, ce qui Fig. 66.

donne $PE = a - x$ ; d'où il ſuit que l'integrale de $yx^2dx =$ à l'integrale de $\frac{bxdx}{2a} \times \overline{a-x}^2$ ( = à l'integrale de $\frac{1}{2}abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}$ ) eſt $= \frac{1}{4}abx^2 - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$ ; & l'integrale de $yxdx =$ à l'integrale de $\frac{bxdx}{2a} \times \overline{a-x}$ ( = à l'integrale de $\frac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}$ ) $= \frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$. Par conſéquent le quotient de l'integrale de $yx^2dx$ , diviſée par l'integrale de $yxdx$

$$\left( = \frac{\frac{1}{4}abx^2 - \frac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}}{\frac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}} \right)$$

$$\text{eſt} = \frac{\frac{24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a}}{\frac{6abx^2 - 4bx^3}{24a}}$$

$$= \frac{6a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8abx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x} =$$ à la diſtance du centre de percuſſion du ſegment $SZVH$ , depuis la baze $SH$.

Si maintenant pour $x$ , vous ſubſtituez $a$ , vous aurez la diſtance du centre de percuſſion de tout le triangle $SAH = \left( \frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6a - 4a} \right) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AE$.

## EXEMPLE V.

99. *Trouver le centre de percuſſion d'un eſpace parabolique qui ſe meut autour d'une ligne paſſant par le ſommet de la parabole parallele à ſa baze.*

Nommant maintenant l'abſciſſe $x$ , toute la hauteur $a$ ; la differenticlle des efforts ſera $x^{\frac{1}{2}}dx$ , & celles des forces ſera $x^{\frac{5}{2}}dx$ , dont l'integrale eſt $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$ , qui étant diviſée par $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}$ ſomme des efforts , le quotient ſera $\frac{3}{7}x =$ à la diſtance du centre de percuſſion de la partie de la parabole dont la hauteur eſt $x$ , depuis le ſommet ; & quand $x$ devient égal à $a$ ,

la diſtance du centre de percuſſion de toute la parabole ſera $\frac{5}{7}a$.

## SCHOLIE.

100. Si on demande le centre de percuſſion d'une parabole d'un degré quelconque, on aura $\frac{2m+1}{3m+1}a =$ à la diſtance du centre de percuſſion depuis le ſommet ; dans cette expreſſion generale, $m$ eſt l'expoſant de la puiſſance de l'ordonnée de la parabole : De maniere que ſi $m=2$, la diſtance ſera $\frac{5}{7}a$, comme dans la parabole ordinaire, ſi $m=3$, comme dans la parabole cubique, la diſtance ſera $= \frac{7}{10}a$, &c.

## EXEMPLE VI.

101. *Trouver le centre de percuſſion d'un eſpace parabolique, qui ſe meut autour de la baze DD.*

Multipliez la differentielle des poids $x^{\frac{1}{2}}dx$, par $a-x$, *Fig. 58* & on aura $ax^{\frac{1}{2}}dx - x^{\frac{1}{2}+1}dx =$ à la differentielle des efforts, qui étant encore multipliés par $a-x$, donnera pour la differentielle des forces $aax^{\frac{1}{2}}dx - 2ax^{\frac{1}{2}+1}dx + x^{\frac{1}{2}+2}dx$, dont l'integrale $\frac{2}{3}aax^{\frac{1}{2}+1} - \frac{4}{5}ax^{\frac{1}{2}+2} + \frac{2}{7}x^{\frac{1}{2}+3} = \frac{70aax^{\frac{1}{2}+1} - 84ax^{\frac{1}{2}+2} + 30x^{\frac{1}{2}+3}}{105.}$ étant diviſée par la ſomme des efforts $\frac{10ax^{\frac{1}{2}+1} - 6x^{\frac{1}{2}+2}}{15}$, le quotient ſera $\frac{35aa-42ax+15xx}{35a-21x}$, diſtance du centre de percuſſion de l'eſpace $DMND$, depuis la baze $DD$, & ſubſtituant $x$ pour $a$, la diſtance du centre de percuſſion de toute la parabole depuis la baze $DD$, ſera $\frac{5}{7}a = \frac{5}{7}AB$.

## EXEMPLE VII.

102. *Trouver le centre de percuſſion d'un cylindre AB, qui ſe meut autour de ſon extrêmité A.*

Fig. 67. Il eſt clair que les viteſſes de toutes les petites parties égales de ce ſolide, ſeront les unes aux autres, à cauſe des tems égaux, dans les mêmes raiſons que les eſpaces $rm$; c'eſt-à-dire, comme les arcs décrits dans leur mouvement, ou comme les rayons, ou les diſtances du point de ſuſpenſion: préſentement que l'axe $AB$ du cylindre ſoit $=s$, une partie quelconque $AP=x$, la circonference de la baze $=p$, & ſon rayon $=r$; alors la differentielle des efforts ſera $\frac{prxdx}{2}$, & celle des forces $\frac{prx^2dx}{2}$, dont l'integrale eſt $\frac{prx^2}{6}$, qui étant diviſée par la ſomme des efforts $=\frac{prx^2}{4}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie du cylindre, dont la hauteur ou diſtance du point $A$, eſt $AP$, & $\frac{2}{3}a$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de tout le cylindre de ce même point $A$.

## EXEMPLE VIII.

103. *Trouver le centre de percuſſion d'un cylindre qui ſe meut autour du point R dans l'axe prolongé.*

Fig. 67. Faites $RB=a$, $RA=b$, $AP=x$, alors $RP=b+x$, & $AB=a-b$, par conſequent $\frac{brpdx+prxdx}{2}$ eſt l'élement des efforts; mais les viteſſes des petits poids égaux du ſolide, ſont les unes aux autres comme les arcs décrits du point $R$ par ces mêmes poids; ainſi les forces ſont les unes aux autres comme les lignes droites qui forment le trapeze décrit par le cylindre. D'où il ſuit que multipliant cette expreſſion differentielle des efforts par $b+x$, on aura $\frac{bbprdx+2bprxdx+prx^2dx}{2}=$ à la differentielle des forces dont l'integrale eſt $=\frac{bbprx}{2}+\frac{bprx^2}{2}+\frac{prx^3}{6}$, qui étant diviſée par la ſomme des efforts $=\frac{bprx}{2}+\frac{prx^2}{4}$, donnera

donnera pour quotient $\frac{6bb+6bx+2xx}{6b+3x}$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie dont la hauteur eſt $AP$, depuis le point $R$, & $\frac{2aa+2ab+2bb}{3a+3b}$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de tout le cylindre depuis le point $R$; car alors $x$ devient $=a-b$. De-là il eſt aiſé de trouver dans quelle partie d'un cylindre de bois, une perſonne doit fraper, afin de donner le plus grand coup qu'il eſt poſſible; ſupoſant que $AR$ repreſente le bras de la perſonne, & $AB$ le bâton.

## EXEMPLE IX.

104. *Trouver le centre de percuſſion d'un cone qui ſe meut autour de ſon ſommet A.*

La differentielle des efforts eſt $\frac{prx^3dx}{2aa}$, & celle des forces eſt $\frac{prx^4dx}{2aa}$, dont l'integrale $\frac{prx^5}{10aa}$, étant diviſée par la ſomme des efforts $=\frac{prx^4}{8aa}$, le quotient $\frac{4}{5}x$ ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie du cone, dont la hauteur eſt $AP$ depuis le ſommet $A$, & $\frac{4}{5}a$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de tout le cone depuis le ſommet $A$. *Fig. 43.*

Remarquez que ce centre de percuſſion eſt le même que celui de gravité du complement de la parabole cubique; les forces étant comme les lignes qui forment ce complement.

## EXEMPLE X.

105. *Trouver le centre de percuſſion d'une ſphere qui ſe meut autour d'un point A à l'origine du diametre AD.*

Supoſez le rayon $=r$, la circonference $=p$, & $AP=x$; vous aurez pour la differentielle des efforts $px^2dx-\frac{px^4dx}{2r}$, & pour celle des forces $px^3dx-\frac{px^5dx}{2r}$, dont l'integrale ſera $=\frac{px^4}{4}-\frac{px^6}{10r}$; qui étant diviſée par la ſomme des efforts $=\frac{px^3}{3}-\frac{px^5}{8r}$; le quotient $\frac{30rx-12xx}{40r-15x}$, ſera la diſtance du centre *Fig. 44.*

de percuſſion du ſegment de la ſphere, dont la hauteur eſt $x$, depuis le point $A$; & $\frac{5}{5}r$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de toute la ſphere depuis ce même point.

## Exemple XI.

106. *Trouver le centre de percuſſion d'un conoïde parabolique qui ſe meut autour de ſon ſommet.*

La differentielle des efforts ſera $\frac{px^2dx}{2r}$, & celle des forces $\frac{px^3dx}{2r}$ dont l'integrale ſera $= \frac{px^4}{8r}$ qui étant diviſée par $\frac{px^3}{6r}$, le quotient $\frac{3}{4}x$, ſera la diſtance du centre de percuſſion, de la partie du conoïde dont la hauteur eſt $x$, depuis le ſommet, & $\frac{3}{4}a$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de tout le conoïde depuis le ſommet.

## Exemple XII.

107. *Trouver le centre de percuſſion d'un ſpheroïde qui ſe meut autour d'un bout de ſon axe tranſverſale.*

Les mêmes choſes étant ſupoſées que dans l'*art.* 93. La differentielle des efforts ſera $\frac{2apxx^2dx - px^3dx}{2aa}$, & celle des forces ſera $\frac{2apxx^3dx - px^4dx}{2aa}$, dont l'integrale $\frac{px^4}{4a} - \frac{px^5}{10aa}$, diviſée par la ſomme des efforts $= \frac{px^3}{3a} - \frac{px^4}{8aa}$, le quotient $\frac{30ax - 12xx}{40a + 15x}$, ſera la diſtance du centre de percuſſion de la partie du ſphéroïde, dont la hauteur eſt $x$ depuis le point du mouvement, & $\frac{5}{6}a$ ſera la diſtance cherchée de toute la ſpheroïde.

## SECTION VIII.

*Réſolution de divers Problemes par le calcul differentiel & integral.*

### PROBLEME PREMIER.

108. *Trouver une ligne, dans laquelle la ſoutangente ſoit égale à la demie-ordonnée.*

DAns tous les cas il eſt évident que l'expreſſion de la ſouſtangente eſt $\frac{ydx}{dy}$ ; ainſi par la condition du probleme $\frac{ydx}{dy} = y$, & $ydx = ydy$, c'eſt-à-dire, $dx = dy$, & l'integrale de chaque membre ſera $x = y$. D'où il ſuit que la ligne cherchée eſt l'hypotheneuſe d'un triangle rectangle, en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit : mais ſi $x$ eſt l'arc d'un cercle, alors la ligne cherchée ſera une cycloïde.

### PROBLEME II.

109. *Trouver une courbe, dont la ſoutangente égale deux fois le quarré d'une demie-ordonnée diviſée par une quantité conſtante ſuppoſée a.*

LA ſoutangente eſt $\frac{ydx}{dy}$. D'où il ſuit que $\frac{ydx}{dy}$ doit être $= \frac{2yy}{a}$. Par conſéquent $aydx = 2y^2dy$, c'eſt-à-dire, $adx = 2ydy$, & trouvant l'integrale de chaque membre, on aura $ax = yy$ ; ainſi la courbe cherchée ſera la parabole d'*Apollonius*.

nombre plus grand que 1, ſera l'integrale de $\frac{dy}{1+y} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy - y^5dy$, &c. laquelle integrale eſt $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, *&c.* = le logarithme de ce nombre qui eſt plus grand que 1.

De plus, ſi la difference de $AB$ à $QN$ eſt $y$, ce qui donne $QN = 1 - y$. Ainſi $AQ$, ou ce qui eſt la même choſe, le logarithme du nombre moindre que 1, ſera égal à l'integrale de $\frac{-dy}{1-y} = dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy - y^5dy$, &c. dont l'integrale ſera $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, &c. étant le logarithme d'un nombre moindre que 1.

## SCHOLIE.

113. Si le côté $AB$, ou $BC$, de la puiſſance d'une hyperbole $= 1$, & $BP = y$; alors on aura $AP = 1 + y$, & l'eſpace aſymptotique hyperbolique ſera $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{7}y^7$, &c. & ſi $BQ = y$: on a dans ce cas $AQ = 1 - y$, & la differentielle $\frac{-ydy}{1-y}$, ſera celle de l'eſpace aſymptotique hyperbolique. D'où il ſuit que cet eſpace ſera $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, &c. *Fig. 69.*

Par conſéquent les logarithmes peuvent être repreſentés par l'hyperbole; car ſi le côté $AB$ de la puiſſance de l'hyperbole $= 1$, l'abſciſſe $AP$ ſera égale à un nombre plus grand que 1, & l'eſpace aſymptotique $BCMP$ ſera égal au logarithme d'un nombre plus grand que 1; de même l'abſciſſe $AQ$ ſera égale à un nombre moindre que 1, & l'eſpace aſymptotique $QNCB$ ſera égal au logarithme d'un nombre moindre que 1. De plus ſi $y = 1$, alors on aura $1 + y = 2$; ainſi le logarithme hyperbolique de 2 ſera $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, *&c.* mais ces ſeries convergent lentement, choſe à quoi on peut remedier en ſubſtituant $\frac{z}{1+z}$ pour $y$.

Remarquez que ces logarithmes hyperboliques ſont les mêmes que ceux de *Neper*, & different par conſequent de ceux de *Briggs*, dont nous nous ſervons communement; cependant on peut les réduire à ceux de *Briggs* étant aux ſiens comme le logarithme hyperbolique de 10; *par exemple*, 2. 302585092994, *&c.* au logarithme de *Briggs* de 10 qui eſt 1. 000000000000, *&c.*

## SCHOLIE II.

114. Si $z$ eſt un nombre impair dont on cherche le logarithme, les nombres $z-1$, & $z+1$, ſeront égaux; ainſi leurs logarithmes & la difference de leurs logarithmes ſeront donnés, que nous ſupoſerons $y$. De même le logarithme d'un nombre moyen proportionnel géométrique entre les nombres $z-1$, & $z+1$, ſera la moitié de la ſomme des logarithmes. La ſerie $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{252002^9}$ ſera le logarithme du raport du moyen proportionnel géométrique entre les nombres $z-1$, & $z+1$, à un moyen proportionnel arithmetique, *par exemple*, au nombre $z$.

## PROBLEME VI.

115. *Si un corps deſcend librement du point A, par le ſeul effet de la peſanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C. On demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces eſpaces.*

Fig. 70. QUe $ADE$ ſoit une ligne verticale, & $BD$, $CE$ des lignes horizontales; nommez $AD$, $a$; $AE$, $b$; $DB$, $x$; & $EC$, $z$.

Il eſt évident, que le tems qu'un corps employe à parcourir une partie infiniment petite d'une ligne quelconque, comme $AB$ ou $AC$, peut être pris pour la differentielle ou la fluxion du tems qu'il employeroit à parcourir les lignes entieres $AB$ & $AC$, ce qui étant accordé, $AB = \sqrt{aa+xx}$, & $AC = \sqrt{bb+zz}$, la differentielle de la premiere ſera $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}$, & celle de la ſeconde $\frac{zdz}{\sqrt{bb+zz}}$.

De plus la vîteſſe du corps décrivant la partie infiniment petite de $AB$, exprimée par $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}} = Bb$, & celle de $AC$, exprimée par $\frac{zdz}{\sqrt{bb+zz}} = Cc$, ſera égale à la vîteſſe reſpective que le corps tombant perpendiculairement du point $A$, auroit dans les points $D$ & $E$; les vîteſſes décrivant les petites parties $Bb$, $Cc$, étant regardées comme égales, qui ſont

proportionelles aux $\sqrt{AD}$ ($\sqrt{a}$) & à $\sqrt{AE}$ ($\sqrt{b}$) ; par conſéquent les tems employés à décrire $Bb$, & $Cc$, ſont comme $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+ax}}$ & $\frac{zdz}{\sqrt{b^2+bz}}$ (les tems employés à décrire des eſpaces quelconques, étant en raiſon directe des eſpaces, & en raiſon inverſe des vîteſſes) ; par conſéquent le tems employé à décrire $AB$, ſera au tems qu'il faut pour parcourir $AC$ comme l'integrale de la premiere differentielle eſt à celle de la ſeconde ; ces integrales ſe trouvant aiſément par la cinquiéme forme des Tables de M. *Cottes*, en faiſant $\theta=1$, $n=2$, *&c.* celle de la premiere étant $\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$, & celles de la ſeconde $\sqrt{\frac{bb+zz}{b}}$, de façon que le tems employé à parcourir $AB$, eſt au tems qu'il faudra pour parcourir $AC$, comme $\frac{AB}{\sqrt{AD}}$ ($\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$) eſt à $\frac{AC}{\sqrt{CE}}$ ($\sqrt{\frac{bb+zz}{b}}$).

## PROBLEME VII.

116. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant librement par l'effet de ſa peſanteur depuis le point A juſqu'au point B, & continuant de ſe mouvoir le long de cette même courbe, parcourra en deſcendant en tems égaux des eſpaces égaux.*

QUe $BD$ ſoit l'axe, & que $AB$ ſoit $=a$, l'abſciſſe $BP=x$, & l'ordonnée $PM=y$ ; maintenant la difference de l'ordonnée $dx=0$ dans le point $B$ origine de la courbe, qui étant convexe proche l'axe, il devient tangente au point $B$ ; par conſequent $Mm$ ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) $=dx$ dans le point $B$ ; c'eſt pourquoi le temps que le corps employe à décrire l'arc $Bb$, eſt comme $\frac{dx}{\sqrt{a}}$, puiſque les tems ſont en raiſons directes des eſpaces & en raiſon inverſes des vîteſſes, & les vîteſſes acquiſes en $B$ & en $M$, étant celles qui s'acquierent par la chûte du point $A$, aux points $B$ & en $M$, (qui ſont en raiſons ſoudoublées de $AB$ à $AP$), le tems employé à parcourir le petit arc $Mm$, eſt comme $\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{a+x}}$. Mais par la

Fig. 72.

condition du probleme, durant la deſcription de la courbe, le corps parcourt en tombant des eſpaces égaux en tems égaux; ainſi $\frac{dz}{\sqrt{a}}$ doit être $=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{a+x}}$, & quarrant chaque membre $\frac{dx^2+dy^2}{a+x}=\frac{dx^2}{a}$; donc $adx^2+ady^2=adx^2+xdx^2$, c'eſt-à-dire, $ady^2=xdx^2$, & tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $\sqrt{a}\times dy=\sqrt{x}\times dx$; enfin prenant les integrales de ces deux membres, on aura $ay^2=\frac{4}{9}x^3$ ou $\frac{9}{4}ay^2=x^3$, qui eſt l'équation de la courbe, & par conſéquent une demie-parabole cubique.

*Autrement.*

Que $AP$ ſoit $=x$, $PM=y$, la vîteſſe acquiſe par la chute depuis le point $A$ juſqu'au point $M=v$, & $z=$ au tems de cette chute juſqu'en $M$; maintenant par les principes de méchaniques $\frac{Mm}{v}$, eſt comme $dz$, tems qu'il faut pour décrire le petit arc $Mm$, c'eſt-à-dire, que $\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{v}}$, eſt comme $dz$. D'où il ſuit que ſi $a$, eſt une quantité conſtante, on aura $a\sqrt{dx^2+dy^2}=vdz$. Mais $v$ eſt comme $\sqrt{x}$, ou comme $\sqrt{ax}$; ainſi on peut prendre $v=\sqrt{ax}$. De même $z$ eſt comme $x-a$, puiſque par la condition du probleme, le tems eſt comme les hauteurs d'où deſcend le corps: ainſi on peut mettre $x-a=z$, & par la même raiſon $dx$ pour $dz$, & en ſubſtituant $dx$ pour $dz$, & $\sqrt{ax}$ pour $v$, dans l'équation $a\sqrt{dx^2+dy^2}=vdz$, on aura cette autre équation $a\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{ax}$, d'où il ſuit que $a^2dx^2+a^2dy^2=axdx^2$ & $a^2dy^2=dx\sqrt{x-a}$; enſuite cherchant l'integrale de chaque membre, qu'on peut aiſément trouver par les petites Tables des courbes quarrables, *pag.* 29, ou par la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*, on aura $a^2y=\frac{2ax-2a^2}{3}\sqrt{ax-a^2}$, ou $ay=\frac{2x-2a}{3}\sqrt{ax-aa}$, faiſant maintenant $n=x-a$, on a $\frac{2n}{3}\sqrt{an}$, ou $a^2y^2=\frac{4an^3}{9}$, ou $\frac{9}{4}ay^2=n^3$. C'eſt pourquoi la courbe cherchée eſt la ſeconde parabole cubique $AB$ étant $=a$, & $BP=n$.

PROBL. VIII.

## PROBLEME VIII.

117. *Trouver la loi de refraction, admettant ce principe, que la nature ſuit dans ſes opérations les voyes les plus ſimples & les plus courtes.*

COmme la lumiere ne peut ſe mouvoir en differens milieux avec la même vîteſſe, ſoit le raport de la vîteſſe de la lumiere durant ſon mouvement de $A$ vers $B$, où il commence à être rompu, à ſa vîteſſe de $B$ vers $C$ durant ſa réfraction; ſoit, dis-je, ce raport exprimé par $\frac{m}{n}$; alors les tems employés à décrire les lignes $AB$, $BC$, ſeront comme $n \times AB$, eſt à $n \times BC$, abaiſſez les perpendiculaires $AQ$, $CP$, & faites $AQ = a$, $CP = b$, $PQ = c$, $PB = x$, & vous aurez $BQ = c - x$, & par conſéquent $BC = \sqrt{bb + xx}$, & $AB = \sqrt{aa + cc - 2cx + xx}$; d'où il ſuit que le tems dans lequel $AB + BC$, eſt parcouruë, ſera $= m\sqrt{bb + xx} + n\sqrt{aa + cc - 2cx + xx}$, qui doit être un *minimum*. Ainſi ſa differentielle ſera $\frac{mxdx}{\sqrt{bb + xx}} + \frac{nxdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx + xx}} = 0$; donc $\frac{mx}{\sqrt{bb + xx}} = \frac{n \times c - x}{\sqrt{aa + cc - 2cx + xx}}$, c'eſt-à-dire, $\frac{m \times PB}{BC} = \frac{n \times BQ}{AB}$. Faites $BC = AB$, alors vous aurez $m \times PB = n \times BQ$, & par conſequent $m : n :: BQ : PB$.

Fig. 72.

D'où il ſuit que ſi $AB$ ou $BC$ eſt pris pour le rayon, $BQ$ ſera le ſinus de l'angle $A$, & $PB$, le ſinus de l'angle $C$; c'eſt-à-dire, parce que $AQ$ & $PC$, ſont paralleles à $DE$; $PB$ eſt le ſinus de l'angle $CBE$ & $BQ$ le ſinus de l'angle $ABD$; *par exemple*, $PB$ eſt le ſinus de l'angle de refraction, & $BQ$ le ſinus de l'angle d'incidence. Il ſuit de-là que le ſinus de l'angle d'incidence, eſt au ſinus de l'angle de refraction dans un raport conſtant; *par exemple*, dans celui de la vîteſſe, de la lumiere avant la réfraction, à la vîteſſe durant cette réfraction.

## PROBLEME IX.

118. *Trouver l'angle BCD, dans lequel un corps placé en A, frapant obliquement un plan en C, doit ſe reflechir à un point donné B; de maniere que depuis le point donné A, juſqu'au point donné B, il parcourt le chemin le plus court.*

Fig. 73. DEs points $A$, $B$, abaiſſez les perpendiculaires $AE$, $BD$. Que $AE=a$, $BD=b$, $ED=c$, & $EC=x$; alors $CD=c-x$ & $AC=\sqrt{aa+xx}$, ainſi $CB=\sqrt{bb+cc-2cx+xx}$; c'eſt pourquoi $AC+CB$, doit être un *minimum*; c'eſt-à-dire, $\sqrt{aa+xx}+\sqrt{bb+cc-2cx+xx}$. D'où il ſuit que ſa differentielle $=0$; donc $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}+\frac{xdx-cdx}{\sqrt{b^2+c^2-2cx+x^2}}=0$; & ainſi $x\sqrt{b^2+c^2-2cx+x^2}+x-c\times\sqrt{a^2+x^2}=0$; donc $x\sqrt{b^2+c^2-2cx+x^2}=c-x\times\sqrt{a^2+x^2}$, c'eſt-à-dire, $EC\times CB=CD\times AC$, ainſi $EC:AC::CD:CB$, par conſequent, *par la propoſition ſeptiéme, liv. 6. d'Euclide*, les triangles $AEC$, $BDC$, ſont équiangles; donc l'angle $ACE$ = l'angle $BCD$.

## PROBLEME X.

119. *Si un fluide eſt compoſé de parties également mobiles diſpoſées librement & à égales diſtances les unes des autres, on demande la partie du cone, qui de toutes les autres de même baze Aa, & de même hauteur BC, trouvera la moindre réſiſtance en ſe mouvant dans ce fluide ſelon la direction de l'axe, s'avançant par ſa petite baze Dd.*

C'eſt la même choſe de conſiderer la partie du cone,
Fig. 74. comme en repos, & les particules du fluide, comme ſe mouvant contre cette partie du cone avec la même vîteſſe.

Tirez $DE$, parallele à $BC$, que la hauteur donnée $BC=b$, le rayon de la baze donné $=a$, & $AE=x$. Or il eſt démontré que l'effet d'une particule quelconque du fluide frapant obliquement la ſurface $AD$, de la partie du cone dans la direction $DE$, pour le mouvoir ſuivant cette même

direction, eſt à l'effet de la même particule frapant directement contre l'anneau formé par la ligne $AE$ (pendant la révolution de $AB$,) pour le mouvoir dans la direction $DE$; comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence $FEV$, ou $ADE$, eſt au quarré du rayon; & parce que dans ce cas l'angle d'incidence eſt invariable, l'effet de toutes les particules frapant la ſuperficie de la partie du cone formée par $AD$, ſera à l'effet de toutes les particules qui peuvent fraper cedit anneau dans cette proportion : c'eſt-à-dire, la réſiſtance de la ſuperficie de la partie du cone formée par $AD$, eſt à la réſiſtance de l'anneau formé par $AE$, comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence eſt au quarré du rayon.

D'où il ſuit que ſi $BC\,(b)$ eſt ſupoſé le rayon, le ſinus de l'angle d'incidence ſera $\frac{bx}{\sqrt{b^2+x^2}}$; car $AD$, $(\sqrt{b^2+x^2}) : AE\,(x) :: BC\,(b) : \frac{bx}{\sqrt{b^2+x^2}}$. Si préſentement on ſupoſe que ledit anneau eſt comme ſa réſiſtance, alors le cercle décrit par $BE$, ſera auſſi comme la réſiſtance; mais parce que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons; donc la reſiſtance de l'anneau eſt à la réſiſtance du cercle, comme $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2\,(2ax - x^2)$ eſt au quarré $\overline{BE}^2\,(a^2 - 2ax + x^2)$ leſquelles quantités repreſenteront les réſiſtances reſpectives de l'anneau & du cercle.

Alors $\overline{BC}^2\,(b^2) : \frac{b^2x^2}{b^2+x^2}$ quarré du ſinus, $:: \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2\,(2ax - x^2) : \frac{2ax^3 - x^4}{b^2+x^2} =$ à la réſiſtance de la ſuperficie de la partie du cone formée par $AD$, auquel ajoûtant la réſiſtance de la petite baze $Dd\,(a^2 - 2ax + xx)$ la réſiſtance de toute la partie du cone ſera $\frac{2ax^3 - x^4}{b^2+x^2} + a^2 - 2ax + xx = \frac{a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2 + a^2x^2}{b^2+x^2}$, dont la difference doit être un *minimum*; c'eſt pourquoi $\frac{2ab^2x\,dx + 2ab^2x^2dx - 2ab^2dx}{\overline{b^2+x^2}|^2} = 0$; donc $x^2 + \frac{b^2}{a}x = b^2$, ainſi $x = \frac{b}{2a}\sqrt{b^2+x^2} - \frac{b^2}{2a}$; mais à cauſe des triangles ſemblables $AED$, $ABV$, on aura $AE\,(x) = \frac{b}{2a}\sqrt{b^2+x^2} - \frac{b^2}{2a} : BC\,(b) :: AB\,(a) : BV =$

$\frac{a^2}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}-\frac{1}{2}b} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} - \frac{1}{2}b^2$, puiſque $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} - \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} + \frac{1}{2}b = a^2$, comme il paroît évidemment par la ſimple inſpection : la ſomme de deux quantités quelconques multipliées par leur difference étant égale à la difference de leurs quarrés.

On tire de-là la conſtruction ſuivante. Coupez $BC$ $(b)$ en $G$, & tirez $AG$ dans la ligne $BC$ prolongée ; faites $GV = AG$ $(\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2})$ & $V$, ſera le ſommet du cone.

## PROBLEME XI.

120. *Trouver la durée d'un pendule, faiſant ſes vibrations dans une cycloïde.*

Fig. 75. QUe le diametre du cercle generateur, ou la hauteur de toute la cycloïde ſoit $= a$ ; que $HB$, hauteur du point $Q$, d'où le pendule commence à deſcendre & à décrire l'arc $QR$, ſoit $= b$. De même que $HP = z$ ; ainſi $PB = 2b - z$ : maintenant que le tems que le pendule employe à décrire $QB$, ſoit $= x$, & ſur $HB$, décrivez le demi-cercle $HNB$, tirez $PM$, $pm$, infiniment proche l'un de l'autre & perpendiculaires à $HB$ ; alors $PN = \sqrt{2bz - zz}$, $Pp = Nq = Rm = dz$, & la viteſſe dans les points $P$, $N$, $Q = \sqrt{z}$.

Par conſéquent puiſque la partie $Mm$, de la courbe eſt décrite par un mouvement uniforme, le tems de ſa deſcription qui eſt $dx = \frac{Mm}{\sqrt{z}}$. Mais par la proprieté de la cycloïde $Mm : mR :: BS : BP$, & $AB : BS :: BS : BP$, par la nature du cercle ; d'où il ſuit que $BS : BP :: \sqrt{AB} : \sqrt{BP}$ ; & de même $Mm : mR :: \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$ ; donc $Mm = \frac{mR \times \sqrt{AB}}{\sqrt{PB}}$, & $dx = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2bz - zz}} = \frac{2bdz\sqrt{a}}{2b\sqrt{2bz - zz}}$. Mais $\frac{bdz}{\sqrt{2bz - zz}} = Nn$ ; par par conſéquent $dx = \frac{2\sqrt{a} \times Nn}{2b}$. Maintenant quand l'integrale de $dx$, ſçavoir $x$, exprime le tems de la deſcente $RD$, de tout l'arc de la cycloïde, l'integrale de $Nn$ ſera = à la cir-

conference de $HN^B$ ; donc comme $2b$, diametre du cercle eſt à la $\frac{1}{2}$ circonference ; ainſi $2\sqrt{a}$, eſt au tems que le pendule employe à décrire l'arc $BQ$. Par conſéquent puiſque $2\sqrt{a} = \frac{2a}{\sqrt{a}}$, repreſente le tems de la deſcente perpendiculaire par $AB$, on aura le théoreme ſuivant ; ſçavoir, le tems d'une oſcillation entiere par un arc quelconque de la cycloïde, eſt au tems de la deſcente perpendiculaire par le diametre $AB$ du cercle générateur, comme la circonference du cercle, eſt au diametre.

### Corollaire.

Il ſuit de-là que les tems employés à décrire tous les arcs d'une cycloïde ſont égaux.

## PROBLEME XII.

121. *La ligne loxodromique & la difference de latitude de deux endroits étant données, trouver la difference de longitude.*

QUe $P$, ſoit le pole ; $A^rF$, le cercle de l'équateur ; $PCB$, $PDA$ des méridiens ; $ACG$, le rhumb paſſant par les deux lieux donnés $A$ & $C$, tirez $Pdcb$, infiniment proche de $PCB$, & de la diſtance $PC$ décrivez l'arc $CD$ : faites maintenant le rayon $PA=a$, la difference de latitude de deux lieux, ſçavoir $AD$, ou $BC=y$ ; la difference de longitude qu'on cherche $AB=x$ ; la tangente de la ligne loxodromique donnée ( ou l'angle conſtant que fait le rhumb avec un méridien quelconque ), ſçavoir, de l'angle $Ccd=m$. De même faites le ſinus de latitude du lieu $C=r$, & le ſinus du complement $=z$. Toutes ces grandeurs ſont variables, excepté $AP$ $(a)$ & la tangente de la ligne loxodromique donnée $=m$. *Fig. 76.*

Maintenant puiſque les arcs $Bb$, $Cd$ ſont ſemblables, on aura $PB$ $(a)$ : au ſinus du complement de latitude de $C$ $(z)$ :: $Bb$ $(dx)$ : $Cd = \frac{z\,dx}{a}$. De plus par la nature du cercle $\overline{PB}^2$ moins le quarré du ſinus de latitude de $C$, ſçavoir $a^2 - r^2 = z^2$, & de $(dy) = \sqrt{dr^2 + dz^2}$, comme il eſt évident. Ainſi en

prenant la differentielle de l'équation $a^2 - r^2 = z^2$, on aura $dz^2 = \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$; ainſi mettant $\frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2}$ pour $dz^2$, dans l'équation $dy = \sqrt{dr^2 + dz^2}$, elle ſe changera en celle-cy, $dy = \frac{adr}{z}$, & ſi $cd$ $(dy)$ eſt ſupoſé rayon, alors $Cd$ eſt la tangente de l'angle $Ccd$ de la ligne loxodromique $= m$. Donc $PB\ (a) : m :: cd\ (dy) : cd = \frac{zdx}{a}$, & multipliant les extremes & les moyens on aura $mdy = zdx$; ainſi $dx = \frac{mdy}{z}$; d'où il ſuit que ſubſtituant $\frac{adr}{z}$ pour $dy$, il viendra $dx = \frac{madr}{z^2} = \frac{madr}{a^2 - r^2}$; & prenant les integrales on aura $BA\ (x) = m \times \frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7}$ &c. = à la difference des longitudes des lieux $A$ & $C$.

L'integrale de $\frac{amdr}{a^2 - r^2}$ peut être exprimée ſelon la méthode de M. *Cottes* dans la meſure d'un raport. Car cette differentielle peut ſe raporter à la ſeconde forme de ſes Tables : car faiſant $\theta = 0$, $n = 2$, $D = am$, $e = a^2$, $f = -1$, $R\left(\sqrt{\frac{e}{f}}\right) = a$, $T\left(x^{\frac{1}{2}n}\right) = r$, & $S\left(= \sqrt{\frac{e + fx^n}{f}}\right) = \sqrt{aa - rr}$, la differentielle de cette forme $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{e + fz^n} dz$, ſe changera en $\frac{amdr}{a^2 - r^2}$, & l'integrale $\frac{2}{ne} DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$ ſera $m \left| \frac{a+r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right. = m \left| \frac{a+r}{z} \right.$, qui eſt l'expreſſion differencielle de la longitude $BA$.

C'eſt-à-dire, que la difference de longitude eſt égale à la meſure du raport du rayon ajoûté au ſinus de latitude du lieu $C$, & au ſinus du complement du même lieu, la tangente de la ligne loxodromique en étant le module; & ſi $E$ eſt un autre lieu dans le rhumb dont le ſinus de latitude ſoit donné; alors on peut trouver par la même regle la difference de longitude $AH$, & par conſéquent auſſi la difference de longitude $BH$ des lieux $C$ & $E$.

### COROLLAIRE.

Si le rhumb $AC = u$, & $cd$ ($dy$) égale le rayon, alors $Cc$ ſera la ſecante de la ligne loxodromique; d'où on tire $PB\ (a) : Cc :: cd\ (dy) : Cc\ (du)$; donc $adu = Cc \times dy$, & prenant les integrales $au = Cc \times y$; donc $u = \frac{Cc \times y}{a}$; c'eſt-à-dire, la difference de latitude $AD$ eſt à la longueur $AC$ ($y$) comme le rayon eſt à la ſecante de la ligne loxodromique.

## PROBLEME XIII.

122. *Cuber le ſolide formé par la révolution des eſpaces conchoïdales CPGB, & BGQc, autour de la ligne ABC, tirée du pole A perpendiculaire à l'aſymptote BG.*

FAites $Ap$ infiniment près de $AP$, du point $A$ décrivez des petits arcs $Qs$, $Gr$, $Pn$, à la diſtance $bC$, ou $Bc$; du point $A$, decrivez l'arc $EF$, & des points $F$, $Q$, $P$, tirez $FH$, $QK$, $PI$, perpendiculaires à $AE$. Nommez $cB$ ($= AE = AF = {}^{r}C = QG = GB$) $= a$, $AB$, $b$, $EH$, $x$, $AH$, $z$, & $HF$, $y$; maintenant à cauſe de la ſimilitude des triangles $AFG, AHF; AH(z) : AF\ (a) :: AB(b) : AG = \frac{ab}{z}$; d'où on tire $AQ = \frac{ab}{z} - a$. & par la même raiſon $AP = \frac{ab}{z} + a$. *Fig. 77.*

De plus, $AF\ (a) : FH\ (y) :: AQ\ (\frac{ab}{z} - a) : QK = \frac{by}{z} - y$; ainſi $PI = \frac{by}{z} + y$; alors la difference de l'arc $EF$, ſçavoir $Ff$, ſera $\frac{adz}{y}$; ainſi les ſecteurs $AFf$, $AQs$, ſont ſemblables; donc $AF\ (a) : Ff\ (\frac{adz}{y}) :: AQ\ (\frac{ab}{z} - a) : Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$ de la même maniere $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

De plus la difference du ſolide formé par la révolution ci-deſſus mentionnée de l'eſpace $AcQ$ ſera $= \frac{1}{3} AQ \times Qs$, multiplié par la circonference décrite par le point $Q$, de même la difference du ſolide formé par l'eſpace $ACF = \frac{1}{3} AP \times Pn$, multiplié par la circonference décrite par le point $P$, & la difference du cone formé par le triangle rectangle $ABG$, pendant la révolution ci-deſſus mentionnée, ſera $\frac{1}{3} AG \times Gr$,

multiplié par la circonferente décrite par le point $G$; par conſequent la differentielle du ſolide produite par $Ac\mathcal{Q}$ ſera $\frac{ab}{3z} - \frac{a}{3} \times \frac{p}{r} \times \frac{by}{z} - y \times \frac{abdz}{zy} - adz$ ($\frac{p}{r}$, étant le rapport du rayon à la circonference) $= \frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2dz}{3z^3} - \frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{a^2bdz}{z} - \frac{a^2dz}{3}$; & la differentielle du ſolide produit par $ACP$, ſera $\frac{ab}{3z} + \frac{a}{3} \times \frac{p}{r} \times \frac{by}{z} + y \times \frac{by}{z} + y = \frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2dz}{3z^3} + \frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{a^2bdz}{z} + \frac{a^2dz}{3}$, & l'élement de ces deux differentielles ſera $= \frac{p}{r} \times \frac{2a^2b^2dz}{z^2} + \frac{2}{3}a^2dz =$ à la difference de la ſomme des deux ſolides produits par les eſpaces $c\mathcal{Q}GB$, $BGPC$; & ainſi $\frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{1}{3}a^2dz$ eſt la differentielle, de la $\frac{1}{3}$ de la ſomme, dont l'integrale ſera $\frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2}{z} - \frac{1}{3}a^2z =$ (ſubſtituant $a-x$ pour $z$) $\frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2}{a-x} - \frac{a^3-a^2x}{3} = \frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{2a^2x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}{a-x}$, & faiſant $x=o$, l'integrale ſera $\frac{p}{r} \times ab^2 - a^3$, qu'il faut ſouſtraire; en ſorte que la véritable integrale eſt $\frac{p}{r} \times \frac{a^2b^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{2a^2x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}{a-x} - ab^2 + a^3 = \frac{p}{r} \times \frac{ab^2x + \frac{a^2x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}{a-x}$.

On trouvera à peu près de la même maniere la differentielle de la moitié de la difference des ſolides, comme nous avons trouvé la differentielle de la moitié de leur ſomme. Car on aura par les triangles ſemblables $AHF$, $ABG$; ces proportions $AH\ (z) : AF\ (a) :: AB\ (b) : AG = \frac{ab}{z}$, & $AH\ (z) : HF\ (y) :: AB\ (b) : BG = \frac{by}{z}$, & puiſque les ſecteurs $AFf$, $APr$,

$APr$, ſont auſſi ſemblables, on aura $AF\ (a) : Ff\ (\frac{adz}{y}) :: AG\ (\frac{ab}{z}) : Gr = \frac{abdz}{yz}$, & par conſequent la differentielle du cone décrit par le triangle rectangle $ABG$ ſera $= \frac{p}{r} \times \frac{ab}{3z} \times \frac{by}{z} \times \frac{abdz}{yz}$, $= \frac{p}{r} \times \frac{a^3b^3dz}{3z^3}$, de laquelle ôtant la differentielle ci-deſſus trouvée, du ſolide décrit par l'eſpace $Ac\mathcal{Q}$, le reſtant $\frac{p}{r} \times \frac{a^3b^3dz}{z^3} - \frac{a^3bdz}{z} + \frac{a^3dz}{3}$, eſt la differentielle du ſolide formé par l'eſpace $C\mathcal{Q}GB$, & ſi on ôte $\frac{p}{r} \times \frac{a^3b^3dz}{3z^3}$, de la differentielle du ſolide formé par l'eſpace $ACP$, le reſtant $\frac{p}{r} \times \frac{a^3b^3dz}{z^3} + \frac{a^3bdz}{z} + \frac{a^3dz}{3}$, eſt la differentielle de l'autre ſolide $BGPC$, de laquelle ôtant la differentielle du ſolide $C\mathcal{Q}GB$, le reſtant $\frac{p}{r} \times \frac{2a^3bdz}{z}$, eſt la difference des deux ſolides ci-deſſus mentionnés, de ſorte que $\frac{p}{r} \times \frac{a^3bdz}{z}$, eſt la differentielle de la moitié de la difference des ſolides, qui peut être comparée à la premiere forme des Tables de M. *Cottes*, en ſubſtituant premierement $a-x$, au lieu de $z$, & $-dx$ pour $dz$; ce qui changera la differentielle en $\frac{p}{r} \times \frac{2a^3bdx}{a-x}$, & faiſant $z=x$, $\theta=1$, $n=1$, $D=a^3b$, $e=a$, $f=-1$, la differentielle $\frac{Dz^{\theta z-1}}{e+fz^n} dz = \frac{p}{r} \times \frac{a^3bdx}{a-x}$, & l'integrale $\frac{D}{nf} \left| \frac{e+fz^n}{e} \right.$ deviendra $= -\frac{p}{r} aab \left| \frac{a-x}{a} \right. = \frac{p}{r} aab \left| \frac{a}{a-x} \right.$; puiſque le logarithme du raport de $a$, à $aa-x$, avec le ſigne *plus* eſt égal au logarithme du raport de $a-x$, à $a$ avec le ſigne *moins*.

Les integrales ou quantités de la moitié de la ſomme & de la moitié de la difference des ſolides étant trouvées, nous paſſerons maintenant à leur conſtruction, en commençant par celle de la moitié de la ſomme. Il eſt aiſé, ſuivant ce qu'on vient de dire, de trouver la differentielle d'un ſecteur de ſphere décrit par le ſecteur circulaire $AEF$, & par conſéquent de trouver auſſi l'integrale ou quantité de ce ſecteur;

la differentielle étant $= \frac{p}{r} \times \frac{a}{3} \times y \times \frac{adz}{y} = \frac{p}{r} \times \frac{a^2 dz}{3}$, & en ſubſtituant $a - x$, au lieu de $z$, l'integrale ſera $= \frac{p}{r} \times \frac{a^2 z}{3} = \frac{p}{r} \times \frac{a^3 - a^2 x}{3}$, & ſupoſant $x = o$, cette même integrale deviendra $\frac{p}{r} \times \frac{a^3}{3}$ qu'il faudra ſouſtraire de l'autre; d'où il ſuit que la véritable integrale ſera $\frac{p}{r} \times \frac{-a^2 x}{3}$ ou $\frac{p}{r} \times \frac{a^2 x}{3}$ = à la ſolidité du ſecteur de la ſphere decrite, comme on a dit ci-deſſus; tout ceci étant ſupoſé : Faites $\overline{AE}^2 (aa) : 3AB \times AG + \overline{AE}^2 \left(3b \times \frac{ab}{a-x} + aa\right) ::$ le ſecteur de la ſphere $\left(\frac{p}{r} \times \frac{a^2 x}{3}\right)$ eſt à la ſolidité de la moitié de la ſomme des ſolides $= \frac{p}{r} \times \overline{ab^2 x + \frac{a^3 x}{3} - \frac{a^2 x^2}{3}}$, qui eſt la même expreſſion qu'on a trouvée ci-devant.

Enfin pour conſtruire l'expreſſion $\frac{p}{r}\ aab \left| \frac{a}{a-x} \right.$, nous ſçavons que $\frac{p}{2r}\ aa$, eſt l'aire d'un cercle qui a pour rayon $BC\ (a)$ qui multiplié par $b \left| \frac{a}{a-x} \right.$ eſt la ſolidité de la moitié de la difference. Mais à cauſe des triangles ſemblables $AHF$, $AGB$, le raport de $a = AF$ à $a - x = AH$, eſt égal au raport de $AG$ à $AB$; par conſéquent la valeur de la moitié de la difference des ſolides qu'on doit cuber, eſt égale à un cylindre qui a $cC\ (2a)$ pour diametre de ſa baze, & qui a pour la hauteur la meſure du raport doublé de $AG$ à $AB$, le module étant $AB\ (b)$. Car $\frac{p}{2r}\ aab \left| \frac{a^2}{a-x^2} \right. = \frac{p}{r}\ aab \left| \frac{a}{a-x} \right.$; puiſque le logarithme d'une raiſon double eſt la même que celui d'une raiſon doublée.

## PROBLEME XIV.

123. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que ſi on conçoit un vaſe formé par ſa révolution autour de l'axe AB perpendiculaire à l'horizon, & que ce vaſe ſoit rempli d'eau qu'on ſuppoſera couler par un petit trou rond percé dans le fond de ce même vaſe; la trouver, dis-je, telle que la ſurface de l'eau en deſcendant laiſſe des eſpaces égaux en tems égaux; ſupoſant que la viteſſe de l'eau qui ſort par le trou, ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au-deſſus du trou.*

SOit $AB=a$, & $AP=x$, hauteur d'eau indeterminée, & ſoit $PM=y$, ſoit encore la ſurface du trou $=b$, la viteſſe $=v$, & le tems de l'affaiſſement de la ſurface $=t$, qui par la condition du probleme eſt comme $a-x$; or $\frac{dx}{dt}$, eſt comme $v$; c'eſt-à-dire, comme $\sqrt{x}$, ou comme $\sqrt{ax}$, par la condition auſſi du probleme; donc $\frac{dx}{dt} : \sqrt{ax}$, comme la ſurface du trou $b$, eſt à la ſurface de l'eau $y^2$. Or, puiſque $t$ peut être pris pour $a-x$; par conſéquent $dt=dx$; ainſi $1 : \sqrt{ax} :: b^2 : y^2$. D'où on tire $b^2\sqrt{ax}=y^2$ & $ab^4x=y^4$, & par conſéquent la courbe $ACM$ eſt une parabole quarrée quarrée. *Fig. 78.*

## PROBLEME XV.

124. *Si AC eſt une ligne horizontale, ſur le point C de laquelle ligne eſt élevé un parallelepipe CD, dont une des ſurfaces ſoit perpendiculaire à la ligne AC; il s'agit de trouver l'angle CAB ſur le point A; duquel angle ſupoſant poſée l'extrêmité A, d'un long ſolide AB; de maniere qu'avec ſon autre extrêmité B, il vienne preſſer le parallelepipede CD, ce ſolide comprimera perpendiculairement CD avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.*

SOit $F$ le centre de gravité du corps $AB$; du point $F$, tirez la ligne $FE$ perpendiculaire à $AC$, & du point $E$, tirez $EI$ perpendiculaire à $AB$; tirez auſſi du point $B$, la ligne $BH$, *Fig. 79.*

perpendiculaire à $AB = AE$, & du point $H$ tirez $HG$ perpendiculaire à $BD$, ſoit $AB = a$, ſoit $AF = b$, & $CB = x$.

Maintenant la preſſion que fera le ſolide $AB$, dans le point $B$, & dans la direction $HB$, contre $CD$, ſera comme $AE$; ainſi on peut le repreſenter par $AE$; donc puiſque $BH = AE$, la preſſion directe contre $CD$ dans le point $B$, ſera $= HG$. Cela eſt démontré dans les principes de la méchanique. D'où il ſuit que $CB \times HG$, eſt l'effet de la preſſion perpendiculaire du ſolide $AB$ contre $CD$ dans le point $B$ qui doit être un *maximum*. De plus $AB\ (a) : AC\ (\sqrt{a^2 - x^2}) :: AF\ (b) : AE = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, & puiſque les triangles $AEI$, $ACB$ ſont ſemblables, ou aura $AB\ (a) : BC\ (x) :: AE\ (\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}) : EI = HG = \frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; d'où il ſuit que $CB \times HG = \frac{bx^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, dont la differentielle $\frac{4a^2b^2x^3dx - 6b^2x^5dx}{2a^4 \times \frac{bx^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}}$, doit être $= 0$; donc $2a^2 = 3x^2$, ainſi $x = \sqrt{\frac{2aa}{3}}$; par conſequent comme $AB : \sqrt{\frac{2}{3}}\ \overline{AB}$, de même le rayon eſt au ſinus de l'angle $CAB = 54^d.\ 44'$.

## PROBLEME XVI.

125. *Trouver la nature d'une courbe ACDB, au long de laquelle ſi un corps tombe librement par ſon propre poids du point donné A, au point donné B, le tems de ſa deſcente ſoit moindre que celui qu'employeroit dans ſa deſcente du point A au point B, un corps qui paſſeroit le long de toute autre courbe.*

*Fig.* 80. SOit $C$ & $D$ deux points donnés dans la courbe, infiniment proche l'un de l'autre: ſoit le point intermediaire $E$ de la courbe, tel que tirant $DI$ & $EH$ perpendiculaires, & $AK$, $CL$, $EM$, paralleles à l'horizon; la petite ligne $EL$, ſoit $= DM$.

Maintenant puiſqu'on ſupoſe que la ligne $ACEDB$, eſt la courbe le long de laquelle le corps tombe du point $A$ au

point $B$, dans le moindre tems qu'il eſt poſſible; il eſt clair qu'il tombera du point $C$ au point $D$, partie quelconque de cette même courbe dans le moindre tems poſſible. Car ſi cela n'étoit pas, ſupoſons qu'il tombe plus vîte le long de $CGD$, qu'au long de $CED$, alors la courbe $ACGDB$, ſeroit décrite en moindre tems que la courbe $ACEDB$, ce qui eſt abſurde.

Puiſque les points $C$ & $D$, ſont donnés de poſition, les lignes $HE$, $ID$, $EL = DM$, ſont par conſéquent invariables & données, & $CL$, $CE$, $EM$, $ED$, ſont variables : ſoit $EL = DM = m$, $HE = b$, $ID = p$, ſoit $CL = u$, $EM = z$; alors le tems qui ſera employé à la deſcription de la ligne $CE$ (étant en raiſon directe de $CE$, & en raiſon inverſe de la vîteſſe) eſt comme $\frac{CE}{\sqrt{HE}} \left( \sqrt{\frac{m^2+n^2}{b}} \right)$ regardant comme égales les vîteſſes avec leſquelles ſont décrites chacunes de ces lignes infiniment petites; de même le tems que le corps employe à décrire la petite ligne $ED$, eſt comme $\frac{ED}{\sqrt{ID}} \left( \sqrt{\frac{m^2+z^2}{p}} \right)$ par conſéquent la ſomme de ces tems doit être un *minimum*; ſçavoir $\sqrt{\frac{m^2+v^2}{b}} + \sqrt{\frac{m^2+z^2}{p}}$; en ſorte que la differentielle $\frac{v dv}{b^{\frac{1}{2}} \sqrt{m^2+v^2}} + \frac{z dz}{p^{\frac{1}{2}} \sqrt{m^2+z^2}}$, doit être $= o$. Or $CN = v + z$ eſt invariable, & $dv + dz = o$, & $dv = -dz$; donc $\frac{v}{b^{\frac{1}{2}} \sqrt{m^2+v^2}} = \frac{z}{p^{\frac{1}{2}} \sqrt{m^2+z^2}}$.

Maintenant ſi $AH = x$, $HE = y$, alors $EM = dx$, & $MD = dy$, de même $ED = \sqrt{dx^2+dy^2}$; par conſequent la difference de la courbe eſt toujours comme $\frac{dx}{y^{\frac{1}{2}}}$; c'eſt-à-dire, en raiſon directe de la difference de l'abſciſſe $AH$ $(x)$, & en raiſon réciproque & ſoudoublée de l'ordonnée $HE$ $(y)$.

On trouvera que la courbe qui a cette proprieté eſt la cycloïde paſſant par les points donnés $A$ & $B$, ayant ſon ſommet renverſé, comme on le démontrera facilement : qu'on ſupoſe $A$ & $B$, poſés de façon que $ACD$ ſoit une demie-cycloyde, *&c.*

Decrivez le demi-cercle generateur $KPB$; prolongez la

ligne $EM$, juſqu'à $P$ & $Q$; tirez la tangente $CET$ au point $E$ de la courbe, & du point $B$, tirez la corde $PB$; ſoit $BK = a$, alors $KQ = y$, & $BQ = a - y$, c'eſt une proprieté connuë de la cycloïde d'avoir ſa tangente $ET$, parallele à la corde $PB$ de l'are correſpondant du cercle generateur; ainſi les triangles $BPQ$, $ECL$, ſont ſemblables, & $PQ$ $(\sqrt{ay - y^2}) : BP\ (\sqrt{a^2 - y^2}) :: CL\ (dx) : CE = \frac{dx\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{ay - y^2}}$

$= \frac{dx \times \sqrt{a} \times \sqrt{a - y}}{\sqrt{y} \times \sqrt{a - y}} = \frac{dx \times \sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, laquelle expreſſion eſt comme $\frac{dx}{y^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt{a}$ étant conſtante ou donnée; donc la cycloïde $AC$ & $DB$ eſt la courbe par laquelle un corps deſeend le plus vîte.

## PROBLEME XVII.

Fig. 82. 126. *Trouver la nature de la courbe DM, qui ſoit telle que le ſolide décrit par ſa révolution autour de ſon axe AP, mouvant dans un fluide (tel que nous avons dit, art.* 119.) *dans la direction de ſon axe, trouvera moins de réſiſtance, que toute autre ſuperficie décrite par toute autre courbe qui ſe termine dans les points donnés D & M, & qui ſe meut de la même maniere autour du même axe AP.*

Fig. 81. SUpoſez les lignes droites $MN$, $NO$, des parties infiniment petites de la courbe cherchée; or les ſurfaces décrites par ces lignes trouveront moins de réſiſtance que deux autres ſuperficies quelconques décrites par deux parties quelconques tirées des points $O$ & $M$, à tout autre point qu'au point $N$. Cela eſt clair: car ſupoſant que cela ne fût point, il s'enſuivroit que le point $N$ ſeroit hors de la courbe cherchée.

Cela poſé, des points $M$, $N$, $O$, tirez $MP$, $NQ$, $OH$, perpendieulaires à l'axe, & du point $M$, tirez $MF$, parallele au même axe; tirez auſſi par le point $N$ un autre parallele indefini $GNT$ qui coupe la ligne $OH$ dans le point $G$, maintenant la réſiſtance de la petite ſuperficie par la ligne $MN$, eſt à la réſiſtance du petit *anneau* décrit par $FN$, comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence eſt au quarré du rayon; c'eſt-à-dire, (à cauſe que l'angle $FMN$ eſt égal

à l'angle d'incidence $TNM$ ) faiſant $MN$ le rayon comme $\overline{FN}^2$ à $\overline{MN}^2$, & ſi la réſiſtance de l'*anneau* décrit par $FN$, eſt repréſenté par lui-même ou plûtôt par $\overline{\mathcal{Q}F}^2 + 2\mathcal{Q}F \times FN + \overline{FN}^2$ moins $\overline{\mathcal{Q}F}^2$ ( qui eſt la difference de $\overline{\mathcal{Q}N}^2$, & $\overline{\mathcal{Q}F}^2$ ) $= 2\mathcal{Q}F \times FN + \overline{FN}^2$, cette difference étant toujours comme celle de l'*anneau*. Mais à cauſe que $FN$ eſt infiniment moindre que $\mathcal{Q}F$; $\overline{FN}^2$, eſt infiniment moindre que $2\mathcal{Q}F \times FN$; & ainſi on peut le rejetter; & la réſiſtance de l'*anneau* ſera $2\mathcal{Q}F \times FN$, ou $\mathcal{Q}F \times FN$, ou $PM \times FN$; d'où en faiſant $\overline{MN}^2 : \overline{NF}^2 :: PM \times FN : \frac{\overline{NF}^2 \times PM}{\overline{MN}^2}$, ce qui exprimera la réſiſtance de la ſuperficie décrite par $MN$; de même $\frac{\overline{GO}^2 \times QN}{\overline{ON}^2}$ ſera celle de la ſuperficie décrite par $ON$.

De plus ſoit donnée de poſition les points $O$, $M$, & la ligne droite $GT$; alors il faut chercher la poſition de $MN$, $NO$, qui ſoit telle, que la réſiſtance de la ſuperficie décrite par ces lignes, ſoit moindre que la réſiſtance des autres ſuperficies décrites par d'autres lignes quelconques $On$, $nM$. Pour la trouver ſoit $PN = a$, $FN = b$, $GO = c$, $N\mathcal{Q} = e$; ces lignes ſont toutes données & invariables, & qu'on ſupoſe les quantités variables $MN = x$, & $NO = z$.

Alors la réſiſtance de la ſuperficie décrite par $MN$, ſera $= \frac{ab^2}{x^2}$ comme il eſt démontré ci-deſſus; de même $\frac{ec^2}{z^2}$ ſera la réſiſtance de la ſuperficie décrite par $ON$; d'où il ſuit que $\frac{ab^2}{x^2} + \frac{ec^2}{z^2}$, doit être un *minimum*; c'eſt-à-dire, $\frac{ab^2xdx}{x^3} + \frac{ec^2zdz}{z^3}$, ou $\frac{ab^2dx}{x^3} + \frac{ec^2dz}{z^3} = 0$, d'où il ſuit $-\frac{ab^2dx}{x^3} = \frac{ec^2dz}{z^3}$.

Maintenant pour trouver une valeur affirmative de $-dx$, affectée de $dz$, prenez le point $n$ infiniment près de $N$, & tirez les lignes droites $On$, $Mn$, auſquelles tirez les perpendiculaires $NS$, $NR$; or puiſque $Nn$, & par conſéquent $NS$ eſt infiniment moindre que $NM$, donc $MN = MR$; ainſi l'angle $MNR$ = l'angle $MRN$ eſt égal à un angle droit. D'où il ſuit que l'angle $RNn$ = l'angle $FNM$; car chacun d'eux

étant ajoûté à l'angle $MNn$, forme un angle droit. De même, puiſque les triangles $NSn$, $nGO$, ſont équiangles, ayant chacun un angle droit $OGn$, $NSn$ & l'angle $ONG$, commun; donc l'angle $SNn$ = l'angle $SOG$ = $NOG$, l'angle $NOS$, étant infiniment petit. Ainſi faiſant $Nn$, le rayon on aura $Rn\,(-dx) : Sn\,(dz) ::$ le ſinus de l'angle $FNM$ : au ſinus de l'angle $GON$, ſupoſant $MN$, le rayon (c'eſt-à-dire, faiſant $MF = m$, & $NG = n$, & prenant $NL = MN$, tirant $LK$, parallele à $OG$) comme $MF\,(m) : NG\,(n)$. Donc $-dx = \frac{mz\,dz}{nx}$, cette valeur étant miſe dans l'équation ci-deſſus, on aura $\frac{ab^4mz\,dz}{nx^4} = \frac{cc^4dz}{z^3}$, d'où on tire $\frac{ab^4m}{x^4} = \frac{cc^4n}{z^4}$.

Maintenant tirez $AB$ ($a$) perpendiculaire à l'axe $AP$, & les lignes droites $BC$, $BE$, paralleles aux deux ſoutendantes infiniment petites $MN$, $NO$; alors $4\overline{AB}^2 \times AC$ ($4a^2 \times \frac{am}{b}$) : $\overline{BC}^3$ ($\frac{a^3x^3}{b^3}$) :: $BC$ ($\frac{ax}{b}$) : $MP$ ($z$), & multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $\frac{b^3m}{x^3} = \frac{1}{4}$ ou $\frac{ab^3m}{x^4} = \frac{a}{4}$; de même $4\overline{AB}^2 \times AE : \overline{BE}^3 :: BE : NQ = \frac{cc^4n}{z^4}$.

Par conſéquent la nature de la courbe $DM$ eſt telle que prenant $AB$ dans la ligne $AK$ perpendiculaire à l'axe = $a$, & tirant $BC$ parallele aux tangentes de la courbe dans un point quelconque $M$, nous aurons toujours $4\overline{AB}^2 \times AC : \overline{BC}^3 :: BC : MP$, qui eſt l'ordonnée.

Maintenant cette courbure peut être décrite par une courbe logarithmique de cette maniere. Prenez $AE = a$, dans la ligne $AK$; & dans la ligne $AP$ prolongée vers le point $A$, prenez $AE = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, & par le point $E$, décrivez la courbe logarithmique $FEN$ à l'aſymptote $AK$, dont la ſoutangente $= \frac{1}{4}a$; alors prenant $AC$ (qu'on ſupoſe = $s$) à volonté, & tirant $CN$ parallele à $AK$, faites $AK = \frac{aa}{4s} + \frac{1}{2}s + \frac{s^3}{4aa}$, & $AP = \frac{11}{48}s + \frac{1^4}{16a^3} - \frac{5}{48}a \mp CN$, ſçavoir *moins* lorſque $AC$ eſt plus grand que $AE$, & *plus*, lorſqu'il eſt moindre : tirez les lignes droites $KM$, $PM$, paralleles à $AP$, $AK$; alors leur point d'interſection $M$, eſt dans la courbe $DM$ cherchée.

Car

Car faiſant $AP=x$, $PM=y$, $AC=S$, la proprieté de la courbe donnera $AK$ ou $PM\ (y)=\frac{a^4+2a^2ss+s^4}{4a^2s}$, & par conſéquent $dy=\frac{1}{2}ds+\frac{3ssds}{4a^2}-\frac{a^2ds}{4s^2}$. Or puiſque $BC$ eſt parallele aux tangentes au point $M$, par conſequent $dx=\frac{sdy}{a}=\frac{sds}{2a}+\frac{3s^3ds}{4a^3}-\frac{ads}{4s}$ : l'integrale duquel eſt $AP\ (x)=\frac{ss}{4a}+\frac{3s^4}{16a^3}$, *moins* l'integrale de $\frac{ads}{4s}$, *plus* ou *moins* quelques quantités invariables. Supoſant que cette quantité ſoit $\frac{3}{48}a$, que nous avons ſouſtrait, de ſorte que $CN$, qui par la nature de la courbe logarithmique $FEN$, eſt l'integrale de $\pm\frac{ads}{4s}$ venant $=o$, $AP\ (x)$ ſoit auſſi $=o$, d'où *&c.*

Lorſque $AC=AE$, l'ordonnée $PM$, qui eſt alors un *minimum* devient $AD=\frac{4}{3}AE$, & la tangente en $D$, ſera parallele à $BE$ ; mais ſi $AC$ eſt ſupoſé moindre que $AE$, la partie $DO$ de la courbe ſera convexe vers $DM$, & divergeant de plus en plus vers $AB$, $AK$. Par conſequent le ſolide qui trouvera la moindre réſiſtance, peut être ou convexe ou concave, ou en partie convexe, & en partie concave, & le point $D$ eſt un point de *rebrouſſement.*

Remarquez que la courbe logarithmique peut être facilement décrite de cette maniere ; il ſuffit de prendre $CN=$ à la meſure du raport $AE$ à $AC$, le module étant $\frac{1}{4}AB\ (a)$.

## PROBLEME XVIII.

127. *Trouver l'angle ABC que forme le plan d'une aile de moulin à vent qui a la figure d'un parallelogramme rectangle, & dont la largeur donnée eſt CB avec l'axe AB, tel qu'un vent ſonflant dans la direction de ſon axe le faſſe tourner avec plus de force que s'il étoit dans toute autre inclination par raport à cet axe.*

TIrez $CD$, perpendiculaire à l'axe, ſoit $CB=a$, $DB=x$. Fig. 84.

Si $BC$ repreſente le nombre des particules d'air qui frape contre l'aile lorſqu'il eſt perpendiculaire à l'axe $AB$ ; alors $DC$, ſera le nombre des particules qui frapent contre l'aîle orſqu'il eſt incliné vers l'axe dans l'angle $DBC$.

Maintenant il ſuit des principes de la méchanique, que la force de l'aîle dans la direction $DC$, ſera comme $BD \times DC \times DC = BD \times \overline{DC}^2$, c'eſt-à-dire, le vent donné fera tourner l'aîle avec une force qui ſera toujours comme $BD \times \overline{DC}^2$, qui doit par conſéquent être un *maximum*; mais $BD \times \overline{DC}^2 = x \times \overline{aa - xx} = a^2x - x^3$; d'où on tire $a^2dx - 3x^2dx = 0$, & $a^2 = 3x^2$; ainſi $\frac{1}{3}a^2 = x^2$, & $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$, & par conſéquent comme $CB : \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, ainſi le rayon eſt au ſinus de l'angle $C$, dont le complément eſt l'angle $ABC$ cherché; par conſéquent l'angle $C$ eſt de $35^\circ. 16'$, & l'angle $ABC$, $54^\circ. 44'$.

## SCHOLIE.

Ce probleme pour ſa facilité auroit dû être mis devant pluſieurs autres, ſurtout avant les deux derniers; mais tous les autres étoient imprimés avant que j'euſſe penſé à celui-ci, ainſi plûtôt que de le ſuprimer, je le mets ici.

M. *Mariotte* dans ſes Hydrotaſtiques a tâché de le réſoudre, mais ſa concluſion eſt fauſſe. M. *Parent* l'a fait comme on le trouve dans l'*Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*; mais nous ne connoiſſons pas ſon procedé qui ne ſe trouve ni dans l'Hiſtoire, ni dans les Mémoires.

FIN.

De l'Imprimerie de CLAUDE SIMON.

616102

## FAUTES A CORRIGER.

PAge 1, *ligne* 11, integrales exprimées : *liſez* integrales des differentielles exprimées.

*P.* 5, *l.* 11, les chiffres & en ôtant : *liſez* des zeros & en formant.

*P.* 11, *l.* 20, puiſſance z : *liſez* puiſſance de z. *Ibid. ligne pénult.* Ces produits après : *liſez* Ces produits ( qui ont *b*, ) après.

*P.* 12, *l.* 24, à la ſeconde puiſſance, *liſez* à toutes les puiſſances. *ligne* 25, ſi vous mettez : *liſez* ſi vous avez.

*P.* 18, *l.* 2, les integrales : *liſez* l'integrale.

*P.* 29, *l.* 5, $\times \sqrt{e+fz}$, *liſez* $\times \sqrt{e+fz^n}$.

*P.* 30, *l.* 12 *& ſuiv.* de Briggs ; de même que pour trouver la meſure des raiſons & des rapports, on ſe ſert d'une grande Table : *liſez* de Briggs qui ſervent à trouver la meſure des rapports ou à l'aide de grande Table.

*P.* 37, *l.* 6, continuë : *liſez* continuée.

*P.* 40, *l.* 15, pour l'aire : *liſez* comme l'aire.

*P.* 66, *l.* 28, égale à l'élement : *liſez* eſt égale à l'élement.

*P.* 69, *l.* 1, *BMS* ☌ : liſez *PMS* ☌.

*P.* 76 en marge, *Fig.* 31 : liſez *Fig.* 7.

*P.* 81, *l.* 14, *AP* : liſez *aP*.

*P.* 105 en marge, *Fig.* 45 : liſez *Fig.* 44.

*P.* 116, *l.* 13, *APF* : liſez *APT*.

*P.* 117, *l.* 17, & faiſant : *liſez* en faiſant.

*P.* 119, *l.* 14, au quotient de la diviſion de la ſomme : *liſez* au quotient de la ſomme.

*P.* 137, *l.* 1, ſera la diſtance : *liſez* qui ſera la diſtance. *ligne* 23, *AD* liſez *Aa*.

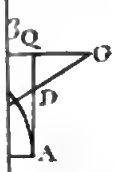
*P.* 140, *l.* 4, & de l'ordonnée : *liſez* & à l'ordonnée.

*P.* 145, *l.* 7, ou il : *liſez* ou elle.

*P.* 147, *l.* 4, *FEV* : liſez *FDV*.

*P.* 153, *l.* 1, *APr* : liſez *AGr*.

Planche 1.



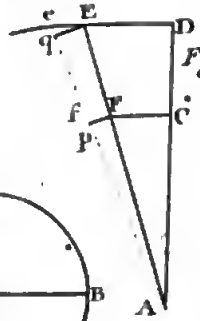


Fig. 4

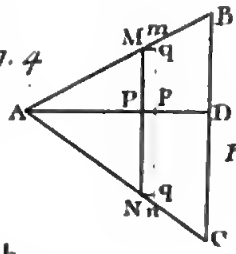


Fig. 5

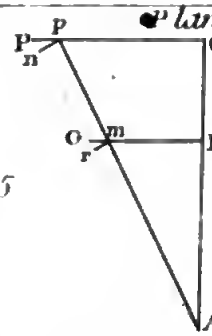
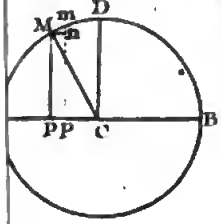


Fig. 6



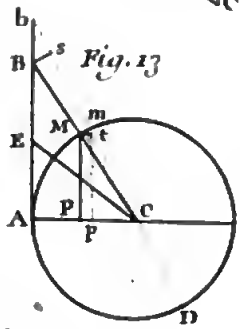


Fig. 13

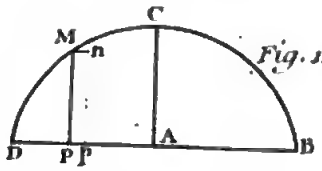


Fig. 14

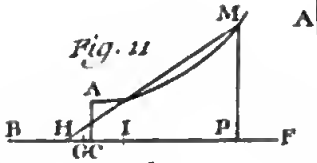


Fig. 11

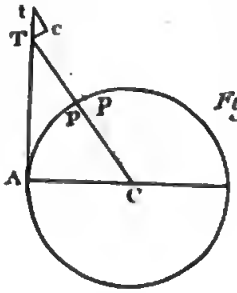


Fig. 19

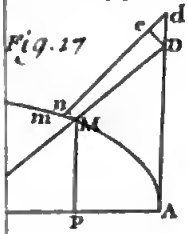


Fig. 17

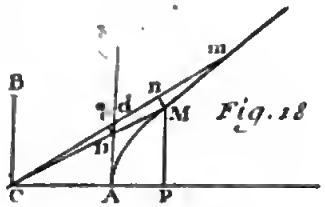
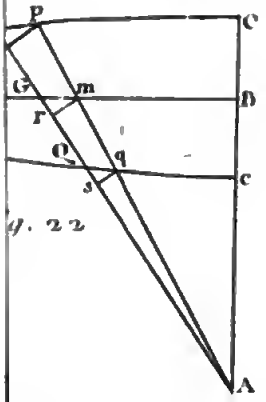


Fig. 18



g. 22

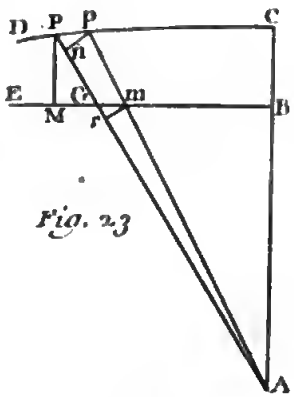


Fig. 23

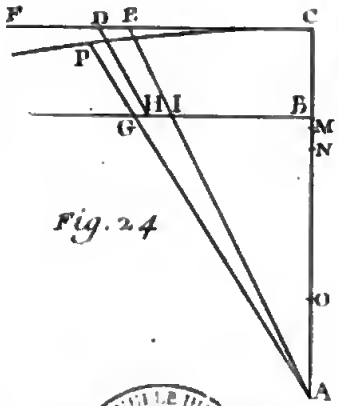
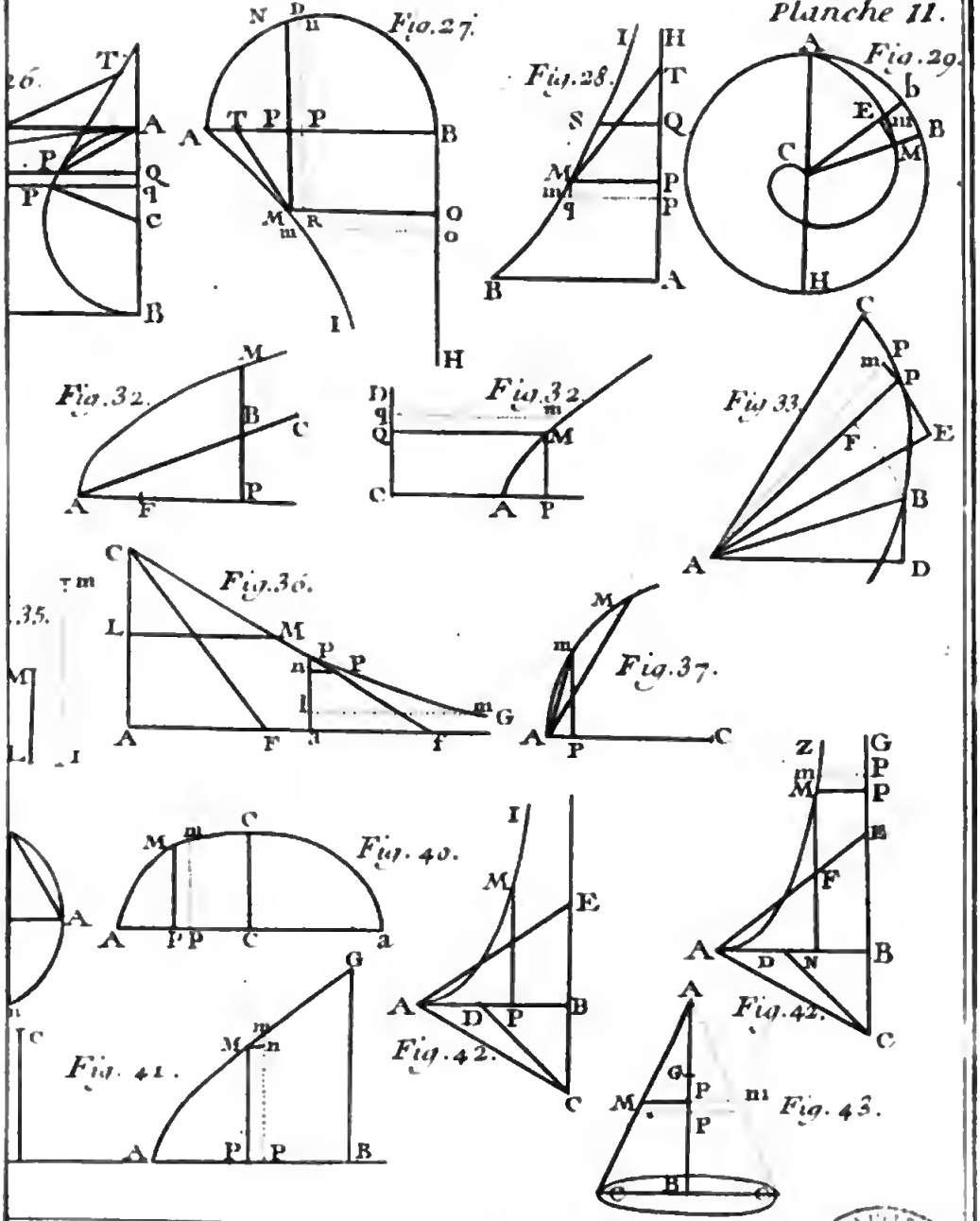


Fig. 24

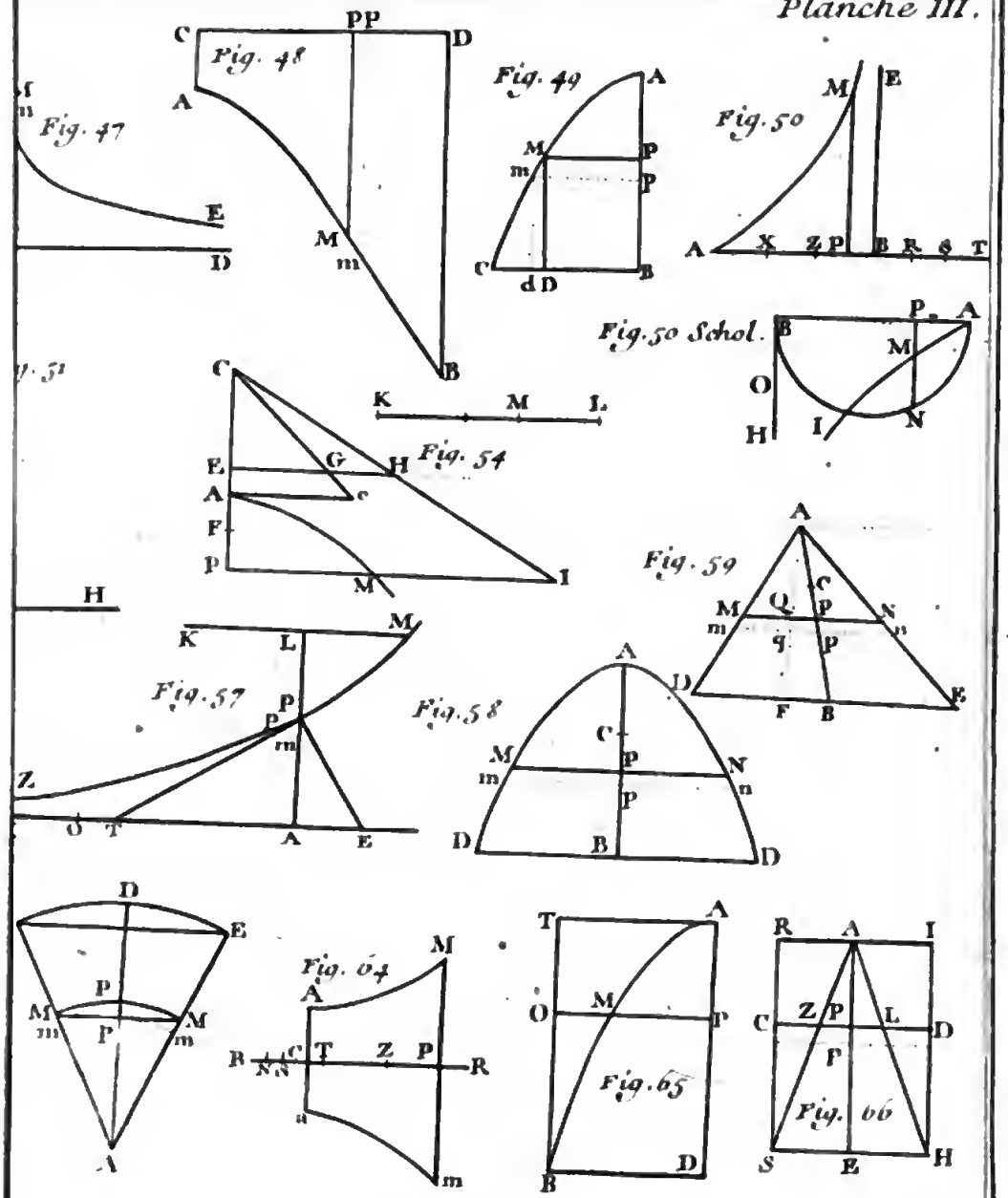
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Planche II.




NAPOLI

Planche III.




BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

Planche IV.

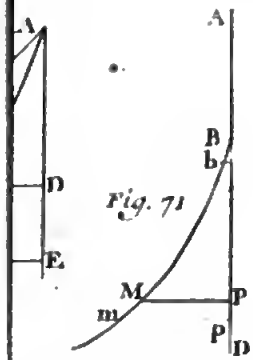






Fig. 71

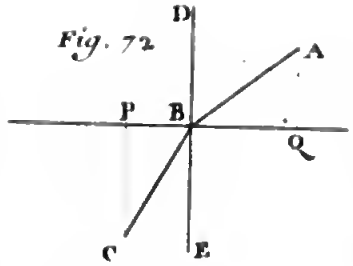



Fig. 72

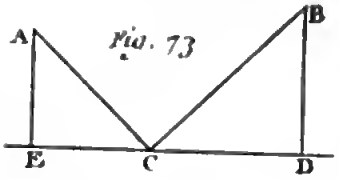



Fig. 73

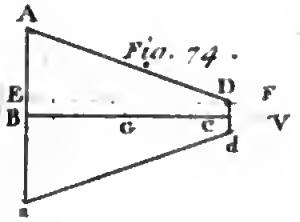



Fig. 74.

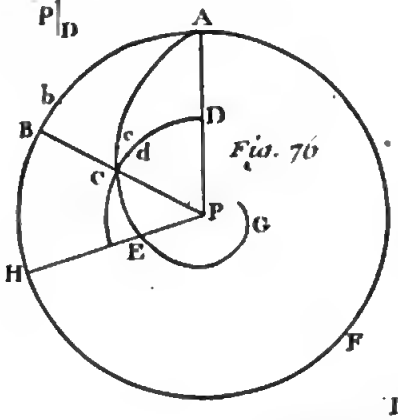



Fig. 76

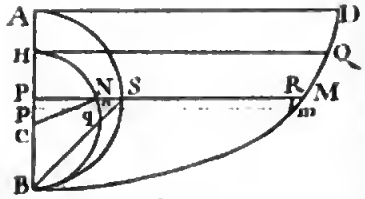



Fig. 75

D

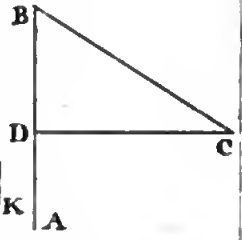



Fig 84

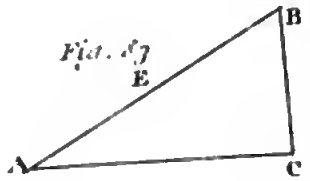
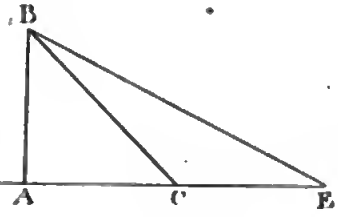



Fig. 87



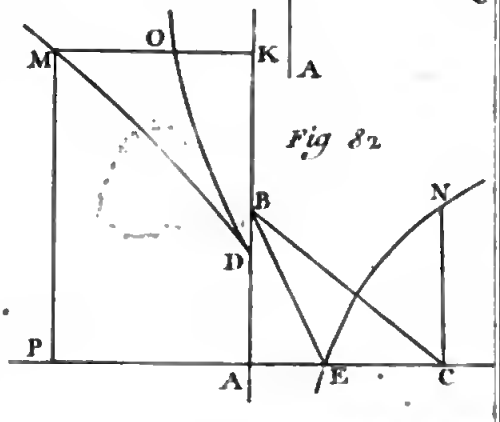
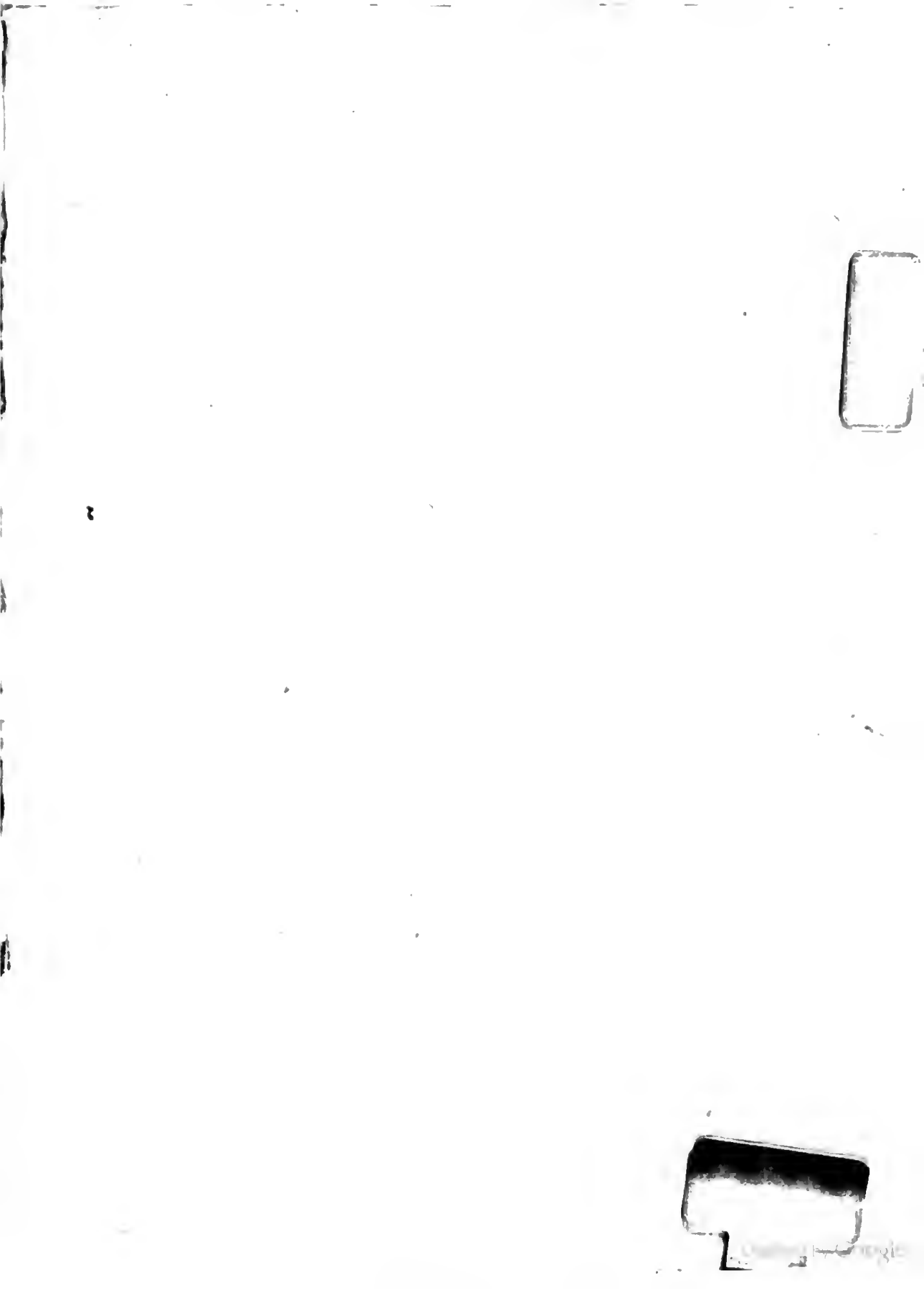




Fig 82

VITTORIO EMANUELE
NAPOLI